Versuche
in
Socratischen Gesprächen
über
die wichtigsten Gegenstände
der Arithmetik.

Von
Johann Andreas Christian Michelsen
Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium.

Erster Band.

Mit Churfürstlich Sächsischer gnädigsten Freiheit.

Berlin, 1784.
Bey Friedrich Maurer.

Bayer. Staats
Bibliothek
München

Vorerinnerung.

Ich will mich hier in keine Beschreibung der Absicht, die ich bey dem gegenwärtigen Werke mir vorgesezt habe, einlassen; denn theils ist solches bereits in den Ankündigungen desselben geschehen, theils werde ich in der Nachricht von der Art, wie ich mich dessen bey dem Unterrichte be-

dient habe, welche ich dem zweyten Bande anhängen werde, darüber verschiedenes sagen müssen, und da auch ausführlicher und besser als hier sagen können. Dagegen habe ich eine Bitte an alle diejenigen, welche diese Anleitung zur Arithmetik lesen und gebrauchen wollen, nemlich: sich nicht durch die im Anfange öfters unvermeidliche Weitläuftigkeit, und durch die bey gering scheinenden Dingen beobachtete Genauigkeit und Sorgfalt abschrecken zu lassen. Wer reich werden will, darf insbesondere im Anfange die Dreyer und Sechser nicht verachten, und hat man einen langen Weg vor sich, so muß man anfänglich langsam gehen, um so bald als möglich

lich sein Ziel zu erreichen. Was die Verände-rungen betrift, die ich sowohl in Ansehung der Sachen, als in Ansehung der Ordnung mir erlaubt habe, so hoffe ich, daß sie sich in der Folge selbst rechtfertigen werden. Eigensinn und Neuerungssucht ist es wenigstens nicht, wenn ich z. B. anstatt der bisher gewöhnlichen vier einfachen Rechnungsarten, sechse annehme. — Vielleicht urtheile ich in manchen Fällen zu individuel, oder auch nicht der Wahrheit gemäß? — Wie könnte ein Mensch eine Ausnahme von einer Regel machen, welcher alle Menschen ohne Ausnahme unterworfen sind? Das aber darf ich von mir versichern, daß ich belehrenden Tadel

als Freundschaft betrachte, und so ihn zu schäz-zen und zu benutzen pflege, als ein solcher Gesichtspunkt es nothwendig macht. Berlin den 2ten Junius 1783.

Erstes Gespräch.

S. — — — Ich habe bisweilen sagen gehört, daß die ganze Rechenkunst aus den vier Specien bestehe. Wenn das ist, so ist die Rechenkunst ja keine schwere Sache, und wenn sich manche, wie ich auch gehört habe, bloß durchs Rechnen zu Geheimenräthen empor geschwungen haben, so möchte ich fast den Vorsatz fassen, auch einmal Geheimerrath zu werden.

L. Noch also wissen Sie nicht, ob Sie diesen Vorsatz fassen wollen? Sie sind doch wohl nicht so stolz, daß der Geheimerath für Sie zu schlecht wäre?

S. Das wohl nicht; aber ich traue den angeführten Urtheilen nicht. Mich dünkt, daß Geheimerrath zu werden, so leichte nicht seyn kann, denn sonst würden es ja wohl mehrere seyn.

L. Und doch ist es richtig, daß die ganze Arithmetic oder Rechenkunst aus den vier Specien besteht, und daß sich manche bloß durchs Rechnen zu Geheimenräthen emporgeschwungen haben.

S. Wie soll ich das verstehen?

L. Die Rechenkunst besteht so aus den vier Specien, als ein gutes, gelehrtes und gründliches Buch aus Worten; und es haben sich manche so durchs Rechnen allein zu Geheimenräthen empor geschwungen, als manche darum Professoren auf Universitäten geworden sind, weil sie Worte zusammen schreiben konnten.

S. Worte wollte ich genug zusammen schreiben; aber ich glaube nicht, daß man mich deswegen zum Professor machen wird.

L. Eben so gewiß, als Sie deswegen hoffen dürfen, Geheimerrath zu werden, weil Sie viele Bogen mit Additions- Subtractions- Multiplications- und Divisions-Exempeln voll geschrieben hätten.

S. Also gehört zum Rechnen, wenn man es so verstehen will, daß man dadurch sein Glück machen kann, doch auch noch mehr, als daß man addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren gelernt habe.

L. Nichts weiter als noch ein Paar Kleinigkeiten: einmal nemlich muß man auch wissen, wenn oder wo man addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren müsse, und dann werden auch nicht immer die Zahlen gesagt, wobey oder womit man solches zu thun habe, sondern man muß sich selbige entweder schon bekannt gemacht haben, oder doch sie zu finden im Stande seyn.

S.

S. Sie sprechen das: Nichts weiter als ein Paar Kleinigkeiten so aus, daß ich diese Kleinigkeiten für sehr wichtige und schwere Dinge halten muß.

L. Auf mein Wort, oder vielmehr wegen des gebrauchten Tons dürfen Sie das nicht thun. Urtheilen Sie selbst, oder fällen Sie, wenn es Ihnen dazu noch an Kenntnissen fehlt, lieber gar kein Urtheil.

S. Ich mögte aber doch, da ich bey Ihnen die Rechenkunst lernen soll, gerne wissen, wie es damit sey.

L. Aufrichtig zu reden, so wissen Sie jetzt noch zu wenig, als daß Sie, wenn ich es Ihnen erklären wollte, es schon würden begreifen können. Ehe Sie diese Sache gründlich einsehen wollen, müssen Sie viel weiter nicht nur in der Rechenkunst, sondern auch in andern Kenntnissen gekommen seyn. Um Sie indeß doch nicht in einer gänzlichen Unwissenheit hierin zu lassen, so sagen Sie mir: Wären Sie wohl im Stande, alle Worte einer guten Predigt, wenn ich sie Ihnen dictirte, aufzuschreiben?

S. O ja, warum nicht? Ich habe ja schreiben gelernt.

L. Könnten auch alsdann diese gute Predigt herlesen?

S. Das wäre ja leicht.

L. Aber können Sie deswegen selbst auch schon eine gute Predigt machen?

S. Da gehört mehr dazu.

L. Wenn ich Ihnen nun aber ein Lexicon gäbe, worin alle Worte, welche Sie irgend gebrauchten, ständen?

S. Ich würde ja aber nicht wissen, was ich jedesmal für welche nehmen müßte.

L. Und eben so wenig sind Sie im Stande wirkliche Rechnungen zu verfertigen, wenn Sie weiter nichts gelernt haben, als die vier Species an und für sich selbst, als Sie ohne weitere Kenntniß aus den einzeln Worte einer Sprache z. B. eine gute Predigt machen können. — Sie haben ja auch wohl schon die vier Species gelernt?

S. Ja, auch schon die Regel de Tri.

L. So sagen Sie mir doch einmal, wie folgendes zu rechnen ist. Es hat jemand 6000 Rthl. Diese giebt er einem andern unter der Bedingung, daß er ihm alle Jahre 500 Rthlr. wiedergeben soll, so doch, daß er dabey nicht bloß die 6000 Rthlr. abtrage, sondern auch für jede 100 Rthlr., die er ein Jahr gebraucht, 5 Rthlr. drüber gebe. Wie viel Jahre erhält er nun für seine 6000 Rthl. jedes Jahr 500 Rthlr.

S. Das kann ich nicht ausrechnen.

L. Es gehört weiter nichts dazu, als daß Sie an den gehörigen Orten und mit den gehörigen Zahlen die Addition, Subtraction, Multiplication und Division erreichten. — Oder sagen Sie mir einmal, wie viel eine Wittwencasse Antritsgeld

und

und jährlichen Beytrag von einem Manne fordern kann, der selbst 36 Jahr, seine Frau aber 28 Jahr alt ist, um der Frau, im Fall der Mann eher stirbt als sie, ihre ganze Lebenszeit hindurch jedes Jahr 200 Rthlr. geben zu können?

S. Da weiß ich noch weniger, wie man das ausrechnet.

L. Vielleicht aber reicht Ihre Kenntniß zu folgendem hin. *Ein Landesherr will durch eine neue Auflage auf die Häuser und Güterbesitzer in seinem Lande seine Einkünfte jährlich um eine Million Thaler erhöhen. Wie viel muß ein jeder dazu geben. Es versteht sich, daß ein jeder nach seinem Vermögen dazu beytragen soll.*

S. Das kömmt immer besser.

L. Ich könnte wenigstens noch sehr viel Fragen hinzusetzen, die Ihre Verwunderung in einem weit höhern Grade erregen würden.

S. Ich sehe nun schon, daß viel mehr dazu gehört, wenn man von sich sagen will, daß man gut rechnen könne, als ich bis jetzt geglaubt habe. Aber ich merke auch, daß ich deswegen Lust, mich recht eifrig auf die Rechenkunst zu legen, bekomme. Denn wenn sie so leicht wäre, als ich es gedacht habe, und wie es auch wohl viele glauben müssen, so wäre es ja nichts besonders, rechnen zu können; aber so, da so viel dazu gehört, so muß es doch eine Ehre seyn, es recht weit darin gebracht zu haben. Ich werde doch auch bey Ihnen alles

lernen,

lernen, was man wissen muß, um die Rechenkunst ganz vollkommen zu wissen?

L. So weit hoffe ich Sie führen zu können, daß Sie künftig mit meinem Unterrichte nicht unzufrieden seyn sollen. Aber zu einem vollkommnen Rechner, zu einem Rechner, der durch die Rechenkunst sein Glück machen will, gehört auch eine Menge von Kenntnissen, die man und zwar mit Recht, eigentlich nicht zur Rechenkunst zählet. Auch diese Kenntnisse Ihnen insgesammt beyzubringen, dazu kann ich mich nicht anheischig machen, dazu müssen Sie andere Gelegenheiten benutzen: Winke aber sollen Sie erhalten, worauf Sie außer der Rechenkunst, um ein vollkommner Rechner zu werden, Ihren Fleiß noch zu richten haben, und von der Rechenkunst selbst hoffe ich, wenn ich Zeit genug haben werde, nichts vorbey zu lassen.

S. Wie lange muß ich denn wohl lernen, bis ich die ganze Rechenkunst durch bin?

L. Wenn Sie oft so voreilig fragen werden, als Sie eben jetzt gethan, so werden Sie sehr lange lernen müssen.

S. Warum denn das?

L. Dergleichen Fragen verrathen eine Seele, die nicht allezeit die erforderliche Geduld hat, um bey anhaltenden Arbeiten, zumal wenn sie den Nutzen davon nicht sogleich empfindet, auszudauren. Um eine große Fertigkeit im Rechnen zu erhalten, muß man viel und lange sich üben, und

im Anfange zumal sich alles recht geläufig bekannt zu machen suchen.

S. Werden Sie denn mit mir ganz von vorne anfangen?

L. Ich glaube wenigstens noch zur Zeit, daß ich es werde thun müssen.

S. Die vier Species kann ich schon recht gut, und ich habe auch schon die Regel de Tri getrieben.

L. Ich weiß es wohl, denn Sie haben mir dies schon vorhin gesagt; aber vielleicht giebt es noch mehr Species oder einfache Rechnungsarten als viere, und vielleicht können Sie Ihre viere auch noch nicht recht. — Sie haben doch auch wohl Zahlen schreiben und aussprechen gelernt?

S. Das ist das erste gewesen.

L. Auf wie viel Arten können Sie also z. B. wohl die Zahl 4 schreiben?

S. Auf einerley Art.

L. So nemlich wie sie hier steht?

S. Ja.

L. Wissen Sie, was diese Ausdrücke bedeuten: $3+1$, $6-2$, $2+2$, 2×2, 2^2, $\sqrt{16}$, 4.10^0

S. Nein, dergleichen habe ich noch nicht gehabt.

L. Wo fangen Sie an, wenn Sie addiren? zur Rechten oder zur Linken?

S. Zur Rechten.

L.

L. Allezeit?

S. Ja.

L. Niemals zur Linken?

S. Nein.

L. Und so machen Sie es auch wohl beym Subtrahiren?

S. Ja.

L. Was kommt denn wohl heraus, wenn man 8 Rthlr. Schuld von 15 Rthlr. Vermögen subtrahirt?

S. 7 Rthlr.

L. 7 Rthl.? Ich bringe da immer 23 Rthlr. Vermögen heraus.

S. Das ist ja nicht möglich, wenn man subtrahiren soll.

L. So ziehen Sie doch einmal 9 von 3 ab.

S. Das geht nicht, denn 9 ist grösser als 3.

L. Wenn also jemand 9 Rthl. von mir zu fordern hat, und ich nur 3 Rthl. habe, so kann ich ihm gar nichts geben?

S. O ja, ich kann ihm 3 Rthl. geben, und bleibe ihm dann noch 6 Rthl. schuldig.

L. Von entgegengesetzten Zahlen haben Sie also wohl noch nichts gehört?

S. Das weiß ich nicht, was das für welche sind.

L. Wir wollen also immer ganz von vorne anfangen. Denn ausserdem, daß Sie die Zahlen auf mehrere Arten, als Ihnen bekannt sind, müssen

sen schreiben können, müssen Sie auch lernen, bey der Addition und Subtraction bisweilen von der Linken anzufangen, müssen wissen, was entgegengesetzte Zahlen sind, und es werden sich noch mehr Dinge selbst bey den einfachen Rechnungsarten finden, die höchst nothwendig sind, und von denen Sie gleichwohl noch kein Wort gehört haben.

S. Aber warum ist mir denn von meinem ersten Lehrer davon nichts gesagt worden?

L. Warum solches nicht geschehen ist, kann ich Ihnen nicht sagen, aber dagegen wohl, warum Sie es nun lernen müssen. Ein gemeiner Rechner wollen Sie doch nicht werden, sondern vielmehr die Rechenkunst so vollkommen als möglich ist lernen?

S. Ja.

L. Dazu ist nun nicht genug, daß Sie, es sey auf was für Art es wolle, ein aufgegebenes Exempel ausrechnen können, sondern Sie müssen solches jedesmal auf die allerkürzeste und leichteste Art, als nur möglich ist, thun können. Wie wollen Sie dazu im Stande seyn, wenn Sie nur immer eine Art lernen? Ueberdem müssen Sie doch auch wissen, warum Sie jedesmal gerade so rechnen, als Sie es thun, denn sonst fehlt es Ihnen an der Gewisheit, daß Sie richtig gerechnet haben; und dazu wird eine genaue und weitläuftige Kenntniß der Zahlen und ihrer Veränderungen erfordert. Endlich müssen Sie selbst im Stande

seyn, die Regeln, nach welchen gerechnet werden muß, zu finden oder zu entdecken, und das geht nicht an, wenn man die Zahlen und ihre Veränderungen sich nicht auf mancherley Art vorzustellen gelernt hat.

S. Wenn ich das alles lernen kann, dann soll das Rechnen mir eine rechte angenehme Beschäftigung seyn.

L. In der Folge gewiß, und um so viel mehr, je weiter Sie kommen. Aber daß die Rechenkunst Ihnen auch gleich vom Anfang an gefallen werde, will ich Ihnen nicht versprechen. Wenn man ein Gebäude aufführen will, so muß man erst auf die Anschaffung und Zubereitung der nöthigen Materialien gedenken. So lange man sich damit noch beschäftiget, kann das Gebäude noch nicht reizen, das ist erst möglich, wenn die angeschafften und zubereiteten Materialien zu einem Ganzen vereiniget sind. Auch weiß derjenige, der nicht den ganzen Plan übersieht, nicht zum voraus, wozu ein jedes der angeschafften Dinge nützen solle. So wird es auch ohngefehr bey Ihnen seyn, indem Sie die Rechenkunst lernen. Im Anfange wird Ihnen manches eben nicht sehr wichtig seyn, indem Sie den Gebrauch davon erst in der Folge einsehen lernen werden. Bedenken Sie alsdann nur, daß man kein Gebäude aus lauter großen Steinen und Materialien, die für sich selbst schon kostbar wären, zusammensetze. Wenn Sie erst das, was Sie

bey den einfachen Rechnungsarten lernen sollen, bey wichtigen und in dem menschlichen Leben vorkommenden Fällen werden anwenden können, dann wird es Ihnen nicht gereuen, auf den Anfang der Rechenkunst insbesondere viel Fleiß und Zeit verwandt zu haben.

S. Ich werde mir vom Anfang an recht viel Mühe zu geben suchen. — Aber Sie sagten ja vorhin, daß es vielleicht noch mehr Species gäbe, als viere. Was sind denn das für welche? Ich habe bisher nur immer von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division gehört.

L. Womit wurde der Anfang gemacht, als Sie zum ersten Male das Rechnen zu lernen anfiengen? Machte man Ihnen da gleich die vier Species oder einfachen Rechnungsarten bekannt?

S. Nein, ich mußte erst die Zahlen aussprechen und schreiben lernen.

L. Ausserdem hätten Sie auch wohl das, was man Ihnen von den vier einfachen Rechnungsarten sagte, nicht gut verstehen können?

S. Nein.

L. Ich werde also auch wohl noch mit Ihnen über die Zahlen, ihre verschiedenen Arten, über die Art und Weise, wie man die Zahlen schreiben und aussprechen kann, reden müssen, ehe ich Ihre Frage so beantworten kann, daß Sie mich völlig verstehen, und bis dahin muß ich Sie also schon zur Geduld verweisen. — Heute sey es genug, Ihnen auf diese

Art ihre nächste Beschäftigung angezeigt zu haben; morgen werde ich sehen, ob ich bis zur Beantwortung der Frage, die Sie an mich gethan haben, werde kommen können.

Zweytes Gespräch.

L. Wie viel Geld würden Sie haben, wenn ich Ihnen erst 8 Gr. und gleich darauf noch 5 Gr gäbe?

S. 13 Gr.

L. Wie viel wären Sie schuldig, wenn einer 8 Gr. und ein anderer 5 Gr. von Ihnen zu fordern hätte?

S. 13 Gr.

L. Wie reich wären Sie wohl, wenn Sie 8 Gr. besäßen, und 5 Gr. schuldig wären?

S. 3 Gr.

L. Wenn Sie aber 8 Gr. schuldig wären und 5 Gr. hätten?

S. Dann hätte ich eigentlich gar nichts, ja ich wäre, wenn ich alles, was ich hätte, gäbe, doch noch 3 Gr. schuldig.

L. Wie viel machen also 8 Gr. und 5 Gr. Vermögen zusammen genommen?

S. 13 Gr. Vermögen.

L. Und 8 Gr. und 5 Gr. Schuld zusammen genommen?

S. 13 Gr. Schuld.

L.

L. 8 Gr. Vermögen aber und 5 Gr. Schuld sind zusammen genommen so viel als?

S. 3 Gr. Vermögen.

L. Und 8 Gr. Schuld und 5 Gr. Vermögen so viel als?

S. 3 Gr. Schuld.

L. Wie ist das? Sie nehmen hier immer 8 Gr. und 5 Gr. zusammen, und bringen doch bald 13 Gr. bald 3 Gr., bald Vermögen bald Schuld heraus?

S. Wenn ich lauter Vermögen, oder lauter Schuld zusammen nehme, so bringe ich auch entweder Vermögen oder Schuld heraus, und dann zähle ich auch alles zusammen; wenn ich aber Vermögen und Schuld zusammen nehmen soll, so ziehe ich das kleinere von dem grössern ab, und behalte also Vermögen übrig, wenn das Vermögen grösser als die Schuld ist, und Schuld, wenn die Schuld größer ist.

L. Also kommt wohl nicht allezeit etwas grösseres heraus, wenn man zu einer Größe eine andere setzet?

S. Es kommt darauf an, wie die Größen sind; wenn die Größen, die man zusammen nimmt, gleich sind, so kommt mehr heraus, wenn sie aber ungleich sind, weniger.

L. Wenn ich also 8 Gr. und 5 Gr. Vermögen, oder 8 Gr. und 5 Gr. Schuld zusammen nehme, so nehme ich gleiche Größen zusammen? —

Wenn mir jemand einen Thaler zu geben hat, und er frägt mich, ob er mir denselben in Zweygroschenstücken, oder in Achtgroschenstücken geben solle, so kann ich wohl sagen, es ist mir gleich, denn ich kann mit den Zweygroschenstücken eben das ausrichten, was ich mit den Achtgroschenstücken thun kann, und das sind daher auch zwey gleiche Grössen. Ist es Ihnen aber auch gleich viel, ob Sie 8 Gr. oder ob Sie 5 Gr. haben, oder 8 Gr. oder 5 Gr. schuldig sind?

S. O nein.

L. Sie können daher auch nicht sagen, wenn die Grössen, die man zusammen nimmt, gleich sind, denn gleich sind nur die Grössen, wovon man die eine statt der andern ohne Unterschied setzen kann.

S. Dann weiß ich nicht, wie ich mich ausdrücken muß.

L. Ist es nicht so, daß wenn jemand zwar Vermögen besitzt aber dabey auch schuldig ist, daß die Schuld das Vermögen, und das Vermögen die Schuld zernichtet. Ich will mich deutlicher erklären. Gesetzt ich hätte 60 Rthlr. vorräthig, sollte aber jemanden 40 Rthlr. bezahlen, so würde ich nicht mehr als 20 Rthlr. eigentlich im Vermögen haben; und wäre ich 60 Rthlr. schuldig und hätte nicht mehr als 40 Rthlr. vorräthig, so hätte ich eigentlich gar kein Vermögen, sondern 20 Rthlr. Schuld; und hätte ich endlich eben so viel Vermögen

gen auf der einen als Schuld auf der andern Seite, so besäße ich eigentlich gar nichts. Hier hebt von den Größen die ich zusammen nehme, die eine die andre, entweder ganz oder doch zum Theil auf, nicht wahr?

S. Ja.

L. Solche Größen nun nennt man entgegen gesetzte Größen, und diejenigen, die das nicht thun, nicht entgegen gesetzte Größen. Wie hätten Sie Sich also, anstatt daß Sie sagten: *Wenn die Größen, die man zusammen nimmt, gleich sind;* ausdrücken sollen?

S. Wenn die Größen, die man zusammen nimmt, nicht entgegen gesetzt sind.

L. Und anstatt zu sagen: Wenn die Größen, die man zusammen nimmt, ungleich sind; hätten Sie sagen müssen?

S. Wenn die Größen, die man zusammen nimmt, einander entgegengesetzt sind.

L. Bringt man also, wenn man verschiedene Größen zusammen nimmt, mehr heraus als jede der Grössen ausmacht, die man zusammen nimmt?

S. Bey nicht entgegen gesetzten Größen allerdings, aber bey entgegengesetzten Größen nicht.

L. Wenn ich von einem Orte 800 Schritte nach Morgen, und dann 600 Schritt auf demselben Wege wieder nach Abend gehe, wie weit bin ich dann von dem gedachten Orte entfernt?

S. 200 Schritt.

L. Und nach was für einer Gegend.

S. Nach Morgen.

L. Wenn in ein Gefäß 800 Quart Wasser gegossen und dann 400 Quart wieder ausgefüllt werden, wie viel ist noch darin?

S. 400 Quart.

L. Auch dies sind Beyspiele von entgegen gesetzten Größen, wobey sich das vorhin gesagte ebenfalls bestätiget. Wir werden in der Folge mit diesen Größen viel zu thun haben, und daher will ich Ihnen hier nur gleich ein Paar Nahmen bekannt machen, mit denen man die Arten derselben benennet. Wenn man nemlich entgegen gesetzte Größen hat, so hat man nur zwey Arten, und davon nennet man die eine positive Größen, und die andere negative. Sie werden von diesen Namen noch nichts gehört haben, allein Sie müssen auch jetzt manche neue Benennungen und Ihnen unbekannte Dinge lernen, damit Sie in der Folge desto kürzer sich ausdrücken, und desto kürzer, besser und leichter rechnen können. Aus diesem Grunde müssen wir nun auch von den entgegen gesetzten Zahlen mit einander reden. Was sind das für welche?

S. Wie können denn Zahlen einander entgegen gesetzt seyn?

L. Auf sehr viele Art; aber ich will Ihnen diese Arten nicht sagen, sondern Sie sollen einen Versuch machen, sie selbst zu finden.

S.

S. Ich habe ja noch gar nichts davon gehört.

L. Das thut nichts zur Sache; eine angestrengte Aufmerksamkeit läßt uns vieles selbst erblicken, was der Unaufmerksame nicht anders als von andern gelernt haben würde. Haben Sie noch nie mit entgegen gesetzten Zahlen zu thun gehabt?

S. Nein.

L. Mit entgegen gesetzten Zahlen, das heißt mit solchen, die sich einander entweder ganz oder doch zum Theil zernichteten?

S. Nein, ich kann mich wenigstens nicht besinnen.

L. Was bleibt denn, wenn man 6 von 6 abzieht?

S. Nichts.

L. Und wenn man 6 von 9 abzieht?

S. So bleibt 3.

L. Wenn man aber 9 von 6 abziehen sollte?

S. Das gienge nicht, da fehlen an der 6 noch 3, ehe man abziehen könnte.

L. Dies ist Ihnen doch also nicht unbekannt?

S. Nein.

L. Haben wir denn da aber nicht entgegen gesetzte Zahlen?

S. Das ist mir auch noch nie gesagt worden.

L. Bey dem geringen Anfange, den Sie in der Rechenkunst erst gemacht haben, denn Sie kennen alles, was Sie gelernt haben, nur erst in der

Ferne, konnte es auch noch unterlassen werden. Aber nicht wahr, wenn Sie eine Zahl von einer andern abziehen, so zernichtet die, welche Sie abziehen, die andere entweder ganz oder zum Theil?

S. Ja.

L. Und also haben Sie denn doch auch, ob Sie gleich den Namen derselben noch nicht gewußt, Sich schon mit entgegengesetzten Zahlen beschäftiget?

S. Auf die Art freylich.

L. Was zeigen denn nun wohl die Zahlen, mit denen Sie Sich bisher beschäftiget haben, an und für sich genommen, an? Was denken Sie Sich z. B. bey der Zahl 6?

S. Daß etwa sechsmal da sey.

L. Ganz recht, etwas anders kann man sich dabey nicht denken. Nehmen Sie nur, um Sich hievon recht deutlich zu überzeugen, einige Fälle, wo man Zahlen zu gebrauchen pflegt. Wird von 10 oder 20 oder 25 Rthlr. z. B. gesprochen, so denket man sich dabey einen Thaler 10 oder 20 oder 30 Male, und also zeigen die Zahlen an und für sich nichts anders an, als daß etwas da sey, und wie viel davon da sey. — Gesetzt nun, daß man mehrere Zahlen hat, die alle anzeigen, daß etwas da sey, sind diese Zahlen dann wohl entgegen gesetzt?

S. Nein.

L. So weit urtheilen Sie ganz recht. Sollten Sie mir nun aber auch wohl sagen können, wenn Zahlen entgegen gesetzte Zahlen sind?

S. Wenn die eine anzeigt, daß etwas da ist, und die andere, daß etwas fehlt.

L. Ganz recht. Aber nun denke ich mir die beyden Zahlen 8 und 6 als entgegen gesetzte Zahlen. Welche von beyden zeigt an, daß etwas da sey, und welche, daß etwas fehle?

S. Das weiß ich *nicht*.

L. Sie können es *auch nicht wissen*, ehe solches nicht noch besonders *angezeigt* wird. Wie es aber angezeigt werde, sollen Sie zu einer andern Zeit lernen; jetzt merken Sie Sich nur, daß man von entgegen gesetzten Zahlen ebenfalls die einen positive und die andern negative nenne, und zwar diejenigen positive, die anzeigen, daß etwas da sey, und diejenigen negative, welche anzeigen, daß etwas fehle. Und nun kennen Sie also Eine Eintheilung der Zahlen; man theilt sie nemlich ein?

S. In positive und negative.

L. Diese Eintheilung wollen wir uns sorgfältig merken, weil wir sie in der Folge eben so oft gebrauchen werden, als die übrigen Eintheilungen der Zahlen, die Sie nun auch kennen lernen sollen. — Wie sind diese Zahlen von einander unterschieden, 4, $\frac{1}{4}$?

S. Die erstere ist eine ganze Zahl, und die andere ein Bruch.

L. So unterscheidet man dergleichen Zahlen allerdings öfters von einander; allein vielleicht läßt sich ein besserer Unterschied vestsetzen. Lassen Sie uns nur vor allen Dingen auf die eigentliche Bedeutung dieser Zahlen sehen. Was denken Sie Sich bey dem Ausdrucke 4 Rthlr.

S. Einen Thaler 4mal genommen.

L. Und die Zahl 4 zeigt doch also an, daß Sie von dem dabey stehenden das 4fache Sich denken sollen?

S. Ja.

L. Was denken Sie Sich nun dagegen bey dem Ausdrucke $\frac{1}{4}$ Rthlr.

S. Den vierten Theil eines Thalers.

L. Was zeigt also hier die Zahl an? Nicht dies, daß Sie einen Thaler in 4 Theile theilen, und einen Theil davon Sich vorstellen sollen?

S. Ja.

L. Also zeigt die Zahl 4 und alle ihr ähnliche 2, 3, 5, 6, 7, 8 u. s. w. an, daß man von etwas das Vielfache machen oder multipliciren, und die Zahl $\frac{1}{4}$ und alle ihr ähnliche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, u. s. w. hingegen, daß man von etwas einen Theil suchen, oder dividiren solle. Dieser Bedeutung nach wollen wir also die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w. Multiplicatoren, und diese $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ u. s. w. Divisoren nennen; und so hätten wir also wieder eine Eintheilung der Zahlen, man kann sie nemlich eintheilen?

S.

S. In Multiplicatoren und Divisoren.

L. Vorhin theilten wir alle Zahlen in positive und negative ein. Wenn wir nun bey dieser zweyten Eintheilung diese erste anwenden wollten, so würde man die Multiplicatoren eintheilen können?

S. In positive und in negative Multiplicatoren.

L. Und die Divisoren?

S. Ebenfalls in positive und negative Divisoren.

L. Und auch dieser Unterschied ist wichtig, und Sie werden wohl thun, wenn Sie Sich ihn merken, ob Sie gleich noch nicht deutlich wissen können, was die Benennungen, positive und negative Divisoren, eigentlich sagen wollen. So bald es aber erforderlich seyn wird, sollen Sie schon das weiter nöthige lernen. — Wie unterscheiden sich denn nun folgende Multiplicatoren 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? Es sollen lauter positive seyn.

S. Weiter nicht, als daß jeder der folgenden größer ist, als der vorhergehende.

L. Und folgende Divisoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$? Auch dies sollen lauter positive Divisoren seyn.

S. Ebenfalls weiter nicht, als daß jeder der folgenden größer ist als der vorhergehende.

L. Das ist allerdings ein Unterschied dieser Zahlen, und auch der, der beym ersten Augenblick allein in die Augen fällt. Allein betrachten Sie einmal

einmal und zwar erstlich jene Multiplicatoren genauer. Ist nicht 4 von einer andern Zahl ein Vielfaches?

S. Ja es ist das zweyfache von 2.

L. Und 6?

S. Ist das 3fache von 2, oder das 2fache von 3.

L. Und 8?

S. Ist das 2fache von 4, oder das 4fache von 2.

L. Aber 5?

S. Das 5fache von 1.

L. Und 3 und 7?

S. Auch das 3fache und 7fache von 1.

L. Hier wäre also der Unterschied, daß einige Zahlen von 1, andere aber von einer andern Zahl das Vielfache wären. Die Multiplicatoren nun, die bloß von 1 das Vielfache sind, nennt man einfache Multiplicatoren, die aber, die es von einer andern Zahl sind, zusammen gesetzte Multiplicatoren. — Vielleicht muthmaßen Sie nun schon, wie die Divisoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ u. s. w. eingetheilt werden können?

S. Diese werden wohl auch in einfache und zusammengesetzte Divisoren eingetheilt?

L. Ganz recht, aber doch nach einem etwas veränderten Grunde. Die Divisoren nemlich sind einfache, die nur als Theile von dem Ganzen, diejenigen aber zusammengesetzt, die als Theile von

Theilen

Theilen betrachtet werden können, z. B. $\frac{1}{4}$ ist die Hälfte von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ die Hälfte von $\frac{1}{3}$ oder ein Drittheil von der Hälfte, u. s. w. — Diese Eintheilung dürfen wir aber nicht so geschwind als die vorhergehenden vorbey lassen, sondern wir müssen uns schon etwas länger dabey aufhalten. Lassen Sie uns also einmal einige Multiplicatoren sowohl als Divisoren nach einander durchgehen. Welche Multiplicatoren sind also von folgenden einfach? 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

S. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 und 19 sind einfache, die übrigen aber alle zusammen gesetzte Multiplicatoren.

L. Warum?

S. 4 ist das zweyfache von 2, 6 das dreyfache von 2, 8 das vierfache von 2, 9 das dreyfache von 3, 10 das fünffache von 2, 12 das sechsfache von 2, 14 das siebenfache von 2, 15 das fünffache von 3, 18 das sechsfache von 3 und 20 das zehnfache von 2; alle übrige aber sind nur das Vielfache von 1.

L. Welche sind denn nun aber von folgenden Divisoren einfach, und welche zusammen gesetzt? $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{20}$.

S. Einfache sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$; zusammen gesetzte hingegen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{20}$.

L. Wie so?

S. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$ sind lauter Theile von einem Ganzen; $\frac{1}{4}$ aber ist auch die Hälfte von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ die Hälfte von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ die Hälfte von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ das Drittheil von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$ die Hälfte von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$ die Hälfte von $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{14}$ die Hälfte von $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{15}$ das Fünftheil von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{16}$ das Viertheil von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{18}$ die Hälfte von $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{20}$ die Hälfte von $\frac{1}{10}$.

L. Das war recht gut geantwortet. Nun nur gleich einen Schritt weiter. Aus was für Zahlen kann man also durch die Vervielfältigung 4 machen?

S. Aus 2 und 2.

L. Und 6?

S. Aus 2 und 3.

L. Und 8?

S. Aus 2 und 4.

L. Und 9?

S. Aus 3 und 3.

L. Merken Sie Sich also, daß man die Zahlen, aus welchen man durch die Vervielfältigung eine zusammengesetzte Zahl hervorbringt, die Factoren dieser zusammen gesetzten Zahl nennt; und sagen Sie mir nun die Factoren von 4?

S. 2 und 2.

L. Von 6?

S. 2 und 3.

L. Von 8?

S. 2 und 4.

L. Von 9?

S. 3 und 3.

L. Es wird nicht nöthig seyn, mehrere Beyspiele von den Multiplicatoren zu nehmen. Aber welches sind denn nun die Factoren von $\frac{1}{4}$?

S. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

L. Von $\frac{1}{6}$?

S. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.

L. Von $\frac{1}{8}$?

S. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$.

L. Von $\frac{1}{9}$?

S. $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$.

L. So weit als wir bis jetzt die zusammen gesetzten Zahlen durchgenommen haben, haben Sie alles recht gut und leicht gefaßt. Aber nun noch eine doppelte Frage. Die erste: Merken Sie nicht unter den Factoren der zusammen gesetzten Zahlen, die wir betrachtet haben, einen Unterschied? Sehen Sie einmal das vorhergehende an. Sind die Factoren immer von einander verschieden?

S. Nein, sondern bisweilen sind sie gleich, bisweilen ungleich.

L. Dieser Unterschied ist wichtig, nach welchen einige zusammen gesetzte Zahlen lauter gleiche, andre aber ungleiche Factoren haben. Wir müssen daher auch für die daher entstehende doppelte Art der zusammen gesetzten Zahlen besondere Namen uns merken. Wenn man also zusammen gesetzte Zahlen hat, deren Factoren ungleich sind, so kann

man dieselben Producte nennen, und zwar ein Multiplicatorproduct, wenn die zusammen gesetzte Zahl ein Multiplicator, und ein Divisorproduct, wenn die zusammen gesetzte Zahl ein Divisor ist. Hat aber oder besteht eine zusammen gesetzte Zahl aus lauter gleichen Factoren, so nennt man sie eine Dignität, und kann sie eine Multiplicatordignität nennen, wenn sie ein Multiplicator, und eine Divisordignität, wenn sie ein Divisor ist.

S. Das ist leicht zu behalten.

L. Welche von folgenden Multiplicatoren, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18, 20 sind also Multiplicatorproducte, und welche Multiplicatordignitäten?

S. 4, 9 und 16 sind Multiplicatordignitäten, die übrigen aber Multiplicatorproducte.

L. Und von folgenden Divisoren, welche werden da Producte, welche Dignitäten seyn? ich meine von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{20}$.

S. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ sind Divisordignitäten und die übrigen Divisorproducte.

L. Welches sind nun die Factoren von der Dignität 4?

S. 2 und 2.

L. Und von der Dignität 9?

S. 3 und 3.

L. Von $\frac{1}{4}$ aber?

S. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

L. Und von $\frac{1}{9}$?

S. $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$.

L. Merken Sie Sich hier noch den Namen, welchen man den Faktoren einer Dignität zu geben pflegt, man nennt sie nemlich Wurzeln. Wenn man eine davon weiß, so weiß man auch die übrigen, weil sie jedesmal alle einander gleich sind, und daher frägt man gewöhnlich auch nur nach einer. Also ist die Wurzel von 4?

S. 2.

L. Und von $\frac{1}{4}$?

S. $\frac{1}{2}$.

L. Nun zur zweyten Frage: Aus wie viel Factoren oder Wurzeln besteht eine jede Zahl?

S. Aus zweyen.

L. So wie wir bis jetzt die zusammen gesetzten Zahlen betrachtet haben, haben wir zwar nur immer zwey Factoren gehabt. Allein ist nicht z. B. 8 auch das zweyfache von dem zweyfachen von 2?

S. Ja.

L. Freylich, denn wenn ich das doppelte von 2 oder 4 nehme, und davon das doppelte suche, so erhalte ich 8. Aus wie viel Factoren besteht also 8?

S. Aus 3 Factoren.

L. Gleichen oder ungleichen.

S. Aus gleichen.

L. Ist es also ein Product oder eine Dignität?

S. Eine Dignität.

L. Welches sind denn nun die Factoren von $\frac{1}{8}$?

S. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, denn $\frac{1}{8}$ ist die Hälfte von der Hälfte von $\frac{1}{2}$.

L. Was ist also auch $\frac{1}{8}$ für eine Zahl?

S. Eine Divisordignität.

L. Es giebt also sowohl Multiplicator- als Divisordignitäten, die aus zweyen, aber auch welche, die aus 3, ja 4, 5, 6, 7 u. s. w. Factoren bestehen, und es unterscheiden sich daher die Dignitäten nicht bloß in Ansehung der Wurzel, sondern auch in Ansehung der Zahl ihrer Factoren von einander. Dies macht nothwendig, daß Sie Sich hier noch einige Benennungen merken. Um nemlich die verschiedenen Dignitäten von Einer Wurzel von einander zu unterscheiden, giebt man ihnen von der Anzahl ihrer Factoren noch einen Beynamen, und nennt sie eine 2te, 3te, 4te, 5te u. s. w. Multiplicator- oder Divisordignität, je nachdem sie aus 2, 3, 4, 5 u. s. w. Factoren besteht, und auf eine ähnliche Art nennt man die Factoren derselben die 2te, 3te, 4te, 5te u. s. w. Wurzel, je nachdem sie zu einer 2ten, 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. Dignität gehört. Einige andere Namen werden noch in der Folge vorkommen; aber das haben Sie Sich hier noch zu merken, daß man bisweilen bey einer Dignität die Anzahl ihrer Factoren durch eine Zahl bemerkt, und diese alsdann den Exponenten oder Logarithmen dieser Dignität nennt. — — So weit dieses Mal. Damit Sie Sich aber die verschiedenen Arten der Zahlen, die Sie heute kennen gelernt

gelernt haben, recht geläufig machen können, so will ich Ihnen dieselben noch in folgender Tabelle vorstellen.

Die Zahlen sind

1. entweder nicht entgegen gesetzte, oder entgegen gesetzte Zahlen, und beyde Arten wieder
2. entweder
   a Multiplicatoren, und diese
      1. einfache
      2. zusammen gesetzte, welche letzte sich
         aa in Multiplicatorproducte und
         bb in Multiplicatordignitäten theilen.
   b Divisoren, und diese
      1. einfache.
      2. zusammen gesetzte, welche letztere sich ebenfalls
         aa in Divisorproducte und
         bb in Divisordignitäten theilen.

Außer diesen sind denn aber auch noch die Wurzeln und die Logarithmen zu merken.

Drittes Gespräch.

L. Sie kennen nun die verschiedenen Arten der Zahlen, mit welchen wir uns fürs erste beschäftigen werden. Ehe ich weiter gehe, wird es wohl nöthig seyn, daß ich Ihnen zuvor die Art und Weise bekannt zu machen suche, wie man alle diese Arten von Zahlen schreibt und ausspricht. Wenn das nun in eben der Ordnung geschehen soll, in welcher ich Ihnen den Begriff davon beyzubringen gesucht habe, wovon muß ich anfangen?

S. Von den entgegen gesetzten Zahlen.

L. Wie viel Arten giebt es davon?

S. Zwey, positive und negative.

L. Was zeigen die positiven Zahlen an?

S. Daß etwas da sey.

L. Und die negativen?

S. Daß etwas fehle.

L. Was zeigen denn wohl die Zahlen, so als man sie gewöhnlich gebraucht, an?

S. Auch, daß etwas da sey.

L. Sind also die positiven Zahlen von den gewöhnlichen Zahlen verschieden?

S. Nein, denn beyde zeigen ja an, daß etwas da sey.

L. Ob man also von Zahlen überhaupt spricht, oder das Beywort positive zusetzt, das ist völlig einerley; man denkt sich in beyden Fällen, daß etwas da sey. Aber denkt man sich das auch, wenn von negativen Zahlen die Rede ist.

S. Nein, dann denkt man sich das Gegentheil, nemlich daß etwas fehle.

L. Ganz recht, und überhaupt werden Sie in der Folge finden, daß man unter dem Positiven allezeit das gedenkt, was man sich gedacht haben würde, wenn man die Beywörter positiv und negativ gar nicht gebraucht hätte, und bey dem Negativen dagegen immer das Gegentheil davon. Jetzt sehen Sie dies erst bey einem Falle deutlich ein, ich werde aber nicht vergessen, es Ihnen auch bey den übrigen zu zeigen, sobald dieselben vorkommen werden. Nun die Frage: Ist es wohl nöthig, die positiven Zahlen durch ein besonderes Zeichen oder Beywort auszuzeichnen, da man sich doch nichts anders dabey denkt, als bey den auf die gewöhnliche Art, ohne alles weitere Zeichen, geschriebenen oder ohne alles weitere Beywort ausgesprochenen Zahlen?

S. Nein, das wäre ganz überflüßig.

L. Aber die negativen Zahlen?

S. Ja die muß man durch ein Zeichen oder Beywort unterscheiden.

L. Dies thut man nun, wenn man Zahlen schreibt, dadurch, daß man davor dies Zeichen — setzt.

setzt. Man spricht solches durch minus aus, welches eigentlich weniger heißt; aber diese Bedeutung geht uns weiter nichts an, für uns ist das Zeichen — und der Ausdruck minus bloß ein Merkmal des Negativen. Nun sagen Sie mir, welche von den folgenden Zahlen positive und welche negative sind? 3, 6, —4, —7, 9, —12, 13.

S. 3, 6, 9, und 13 sind positive und 4, 7, und 12 negative Zahlen.

L. Sie haben ganz recht geantwortet, und die positiven Zahlen von den negativen unterscheiden gekonnt, wenn gleich die positiven durch kein besonderes Zeichen bemerkt waren. Indeß kommen doch Fälle vor, wo man Gefahr laufen würde, die positiven Zahlen mit den negativen zu verwechseln, wenn sie nicht ebenfalls durch ein besonderes Zeichen bemerkt würden. Ist es in solchen Fällen auch noch ganz überflüßig, den positiven Zahlen ein Zeichen vorzusetzen?

S. Nein, dann nicht.

L. Will man nun die positiven Zahlen durch ein Zeichen bemerken, so thut man solches durch dies Zeichen +. Man spricht solches durch plus aus, welches Wort eigentlich mehr bedeutet, indeß geht auch diese Bedeutung uns nichts weiter an, sondern es ist das Zeichen + und das Wort plus uns bloß ein Merkmal des Positiven. Wenn man mehrere entgegen gesetzte Zahlen oder Größen schreibt oder ausspricht, und die erste davon eine

positive

positive ist, so setzt man das Zeichen + nicht, sagt auch nicht vor der Zahl plus, weil da durch Auslassung dieses Zeichens oder Wortes kein Misverstand entstehen kann, denn man muß ja ohne das Zeichen + oder das Wort plus sich eben das gedenken, was man denken würde, wenn ein Zeichen stünde. — So viel jetzt von der Bezeichnung und Aussprache der entgegen gesetzten Zahlen. — Was folgen nun für Zahlen, der vorhin gedachten Ordnung nach?

S. Die Multiplicatoren und Divisoren.

L. Wie man die Multiplicatoren überhaupt zu schreiben habe, wird Ihnen wohl bekannt seyn?

S. Die Multiplicatoren schreibt man mit den gewöhnlichen Zifern, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 u. s. w.

L. Ganz recht; und die Divisoren? Vielleicht können Sie mir das auch sagen, da wir schon einige Beyspiele gehabt haben.

S. Man gebraucht dazu ebenfalls die gedachten gewöhnlichen Zifern, setzt aber eine 1 darüber, und macht zwischen beyde einen Querstrich. z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$ u. s. w.

L. Dabey brauche ich mich also wohl nicht weiter aufzuhalten?

S. Das ist mir schon alles bekannt.

L. Mir zum Gefallen lassen Sie mich doch aber auch wohl einmal etwas bekanntes, wäre es auch nur um einer Wiederholung willen, durchnehmen?

S. Das hängt ja einzig und allein von Ihnen ab.

L. Schon bekannte Dinge von neuem durchdenken ist aus einem doppelten Grunde gut. Einmal macht man sich dadurch das erlernte geläufiger, und auf Fertigkeit kommt es in allen Dingen an; und dann lernt man bey dergleichen Wiederholung oft noch manches, woran man vorher gar nicht denken konnte, denn alles kann man ja nicht mit einem Male fassen. Lassen Sie Sichs also immer gefallen, daß ich alles das, was Sie in der sogenannten Numeration gehabt haben, noch einmal durchgehe. — Wie sprechen Sie folgende Zahl aus? 6666666.

S. Sechs Millionen, sechs Hundert, sechs und sechszig Tausend, sechs Hundert und sechs und sechszig *).

L.

*) Mein Schüler kann, wie aus dieser Antwort erhellt, bereits die Zahlen aussprechen, und ich setze, wie aus dem vorhergehenden erhellt, auch sonst schon verschiedenes bey ihm voraus, was man bey einem gänzlichen Anfänger in der Rechenkunst nicht voraussetzen kann. Daß ich dies thue, geschieht aus verschiedenen Gründen. Einmal hätte ich anfänglich gar zu weitläuftig seyn müssen, wenn ich meinen Schüler ganz und gar ununterrichtet, und nur mit guten Fähigkeiten begabt, hätte annehmen wollen, und hätte durch diese Weitläuftigkeit vielleicht manchen von dem Gebrauche dieser Anleitung

zur

L. Ich sehe ja da weiter nichts als Sechsen. Wo kriegen Sie denn die Millionen, die Tausende und

zur Rechenkunst für sich und andere abgeschreckt. Ferner bringt gewöhnlicher Weise der, der förmlich die Rechenkunst zu erlernen anfängt, schon manche Vorerkenntnisse von den Zahlen, der Art und Weise sie zu schreiben und auszusprechen, und von den ersten vier einfachen Rechnungsarten mit, denn es kommen alle diese Gegenstände zu häufig im gemeinen Leben vor, als daß nicht ein jedes Kind schon frühzeitig einige Kenntniß davon erlangen sollte. Endlich kann ich das etwanige Verlangen derer, die gern die Art wissen möchten, das, was ich voraussetze, denen, welchen es nöthig ist, beyzubringen, durch einige Anmerkungen erfüllen, die ich von Zeit zu Zeit dem Texte beyfüge, und von welchen daher hier die erste stehen soll.

Richtige Begriffe von den Zahlen sind das erste, worauf man es bey einem Schüler in der Rechenkunst anlegen muß. Man bringt dieselben auf die leichteste und beste Art bey, wenn man wirkliche Dinge oft und nach folgenden Regeln überzählen läßt.

1. Um die allerersten Begriffe von den Zahlen einem Kinde beyzubringen, das dergleichen noch gar nicht hat, lege man demselben, so weit als man zählen will, und also anfänglich natürlicher Weise höchstens bis 10, die Mengen, deren Zahl es kennen lernen soll, einzeln vor, und sage ihm dann die beyzubringenden Zahlen nach der Reihe. Die Dinge,

und Hunderte u. s. w. her? Ich hätte diese Zahl sechse und sechse und sechse und sechse und sechse und sechse und sechse gelesen.

S.

Dinge, bey welchen es zählen lernen soll, müssen aber von einerley Art seyn. Sollte ich z. B. diese Regel bey einem Kinde befolgen und hätte Aepfel bey der Hand, so legte ich, um nur bis 6 fürs erste zu gehen, die Aepfel so auf dem Tisch, wie hier folgende Punkte gezeichnet sind,

. .. .

wiese dann mit dem Finger darauf und sagte, eins, zwey, drey, vier, fünfe, sechse, und zwar so oft, ob gleich zu verschiedenen Zeiten, und an so verschiedenen Dingen, bis das Kind bis sechse zählen könnte. Hätte ich dies erreicht, so brächte ich ihm auf eben die Art die folgenden Zahlen so weit ich könnte bey, und dann erst lehrte ich dasselbe eine Menge von Dingen, die neben einander liegen, überzählen. Nun legte ich z. B. eine Anzahl Aepfel so auf dem Tisch, wie folgende Puncte es vorstellen,

....

und zählte dieselben nach der Reihe über, und wiederholte dergleichen Uebungen an verschiedenen Dingen, die dann auch in einer andern Ordnung lägen.

2. Sind auf diese Art die Begriffe von den Zahlen in gehöriger Anzahl und Lebhaftigkeit und Richtigkeit erwirkt, so muß das Kind ebenfalls an Dingen, die seinen Sinnen ausgesetzt sind, auf die

Absätze

S. Ja es kommt bey den Zahlen auch auf den Ort an, wo sie stehen. Die erste 6 zur Rechten

Absätze aufmerksam gemacht werden, die wir beym Zählen zu machen pflegen, indem wir nach Zehnern, Hunderten, Tausenden u. s. w. zu zählen pflegen. Legt man je 10 und 10 Dinge von einerley Art hin, und läßt man jedes 10 erst einzeln und dann alle Dinge in einer Reihe überzählen, so erreicht man in Ansehung der Zehner gewiß bald seinen Zweck, und wie man es nachher mit den Hunderten machen könne, braucht wohl keiner besondern Anzeige. Je weiter man aber in dieser und der vorhin gedachten Uebung geht, desto besser ist es und man kann leicht weit gehen, denn die Dinge, welche man zählen lassen will, brauchen ja nicht kostbar zu seyn. Eine Hand voll Erbsen, oder eine Menge Stücke Papier sind eben so gut als goldne Münzen.

3. Nun erst ist es Zeit ein Kind so zählen zu lassen, daß es keine Dinge, welche es zählte, wirklich vor sich hat. Indeß ist es doch gut, daß dasselbe zuerst noch sich wirkliche Dinge dabey vorstelle, und wenn es so fertig zu zählen gelernt hat, nun auch, ohne besondere Dinge sich vorzustellen, zähle. Bey dieser letzten Uebung muß man in die Tausende fortgehen. Wer nach der Reihe bis zu einigen Tausenden gezählt hat, wird nicht wie manches Kind bey Tausend sich ohngefehr eine Menge von 110 gedenken, keine Quinquillion Pfennige höchstens für einige Tonnen Goldes halten, und wenn er zugleich auf die Zeit gemerkt hat, die dazu erfordert

ten bedeutet sechse, aber die 2te bedeutet schon sechszig, die 3te sechs Hundert, die 4te sechs Tausend, und so geht das weiter fort.

L.

dert wird, sich nicht bereden lassen, daß jemand in der Baumannshöle an den Säulen, welche daselbst der Tropfstein bildet, 20000 Ansätze sorgfältig gezählet habe, weil da mehr Zeit zu erfordert wird, als schwerlich eine Besichtigung der ganzen Höhle dauert.

4. Wenn man auf diese Art ein Kind mit den Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung hinlänglich bekannt gemacht hat, so kann man es nun auch darin zu üben anfangen, daß es bey wirklichen Dingen entweder, oder indem es dergleichen sich nach Belieben nur gedenkt

a so zähle, daß es erst immer eine, dann zwey, dann drey, dann vier Zahlen u. s. w. überspringe, z. B.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. u. s. w.
1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40. u. s. w.
1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45. 49. 53. u. s. w.
1. 6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51. 56. 61. 66. u. s. w.

b. von den Zahlen nach der Reihe anfange, und zu denselben immer so viel setze, als die erste Zahl beträgt, und die letzte jedesmal bemerke, z. B.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. u. s. w.
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. u. s. w.
4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. 44. u. s. w.

c. kann man es auch rückwärts zählen lassen, und zwar anfänglich in der natürlichen Ordnung

der

L. In welcher Stelle haben also die Zifern, mit welchen man die Zahlen schreibt ihre eigentliche, oder nur eine einfache Bedeutung.

S.

der Zahlen, und dann auch so, daß es eine, dann zwey, dann drey Zahlen u. s. w. überspringe.

d. endlich kann man ihm nach Belieben Zahlen geben, und durchs Zählen finden und bemerken lassen, wie vielmal es bis zu dieser Zahl, 2 oder 3 oder 4 *u. s. w. zählen* könne.

Wie alles dieses zu einer Fertigkeit in den vier ersten Rechnungsarten vorbereite, habe ich nicht nöthig zu beweisen, ich zeige also nur darauf hin, und rede nun noch von der Art, einem Kinde auch die Fertigkeit, geschriebene Zifern auszusprechen, beyzubringen.

Die Zifern 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0 muß ein Kind eben so lernen, als gewöhnlicher Weise die Buchstaben gelernt werden. Ist es aber damit bekannt, so kann man ihm sagen, daß eben diese Zifern, wenn zwey davon zusammen stehen, in der ersten Stelle neben der Zifer zur Rechten, zehn, zwanzig, dreyßig, vierzig u. s. w. gelten. Nun übt man es in dem Aussprechen der Zahlen von 10 bis 100, indem man dasselbe zugleich bey dem Aussprechen zweyer Zahlen von der Rechten anzufangen gewöhnt, so lange, bis es ohne alle Mühe jede dieser Zahlen ausspricht. Dann setzt man die 3te Zifer hinzu, sagt ihm ihren Werth, und stellt nun mit den Zahlen von 100 bis 1000 eine ähnliche Uebung an, und so geht man so weit fort als man es für

gut

S. Zur Rechten oder am Ende.

L. Also sprechen Sie einmal diese Zahl aus: 666,666.

S. Das ist ja eben dieselbe, das sind sechs Millionen, sechs Hundert und sechs und sechszig Tausend, sechs Hundert und sechs und sechszig.

L.

gut findet. Das berühre ich hier nur noch, daß ich es nicht für gut halte, in der Aussprache der Zahlen ein Kind weiter zu führen, als seine vollständigen und deutlichen Begriffe von Zahlen gehen, und daß mir folgender Weg nach dem vorhin angeführten sehr gut scheint. Man schreibt eine Zahl hin, z. E. 2 und läßt sie aussprechen; dann setzt man dieselbe daneben, also 22, und läßt auch diese aussprechen; ferner fügt man dieselbe Zahl von neuem hinzu, schreibt also 222, läßt auch diese aussprechen, und fährt auf diese Art so weit fort als man will. Hat man dies zur Gnüge gethan, so thut man dasselbe mit der Veränderung, daß man verschiedene Zahlen nach und nach neben einander schreibt, und nach jeder Hinzufügung einer Zahl die ganze aussprechen läßt. Man muß sich nur vor dem zu starken Eilen hüten, und nicht eher zu drey Zahlen fortgehen, als bis zwey, und nicht eher zu vieren, als bis drey Zifern fertig ausgesprochen werden können.

Bey dieser Anmerkung habe ich müssen weitläuftig seyn, bey den folgenden hoffe ich mich kürzer fassen zu können.

L. Wo ich nicht irre, sind es nur sechs Tausend, sechs Hundert und sechs und sechs und sechszig, und sechs Hundert und sechs und sechszig Tausendtheile.

S. Wie denn so? So habe ich noch keine Zahl aussprechen gehört.

L. Vergleichen Sie einmal diese letztere Zahl mit der vorhergehenden; bemerken Sie keinen Unterschied?

S. Nein.

L. Sehen Sie bey der letztern das Comma nicht, welches nach der dritten 6 von der Rechten an, oder bey der vierten von der Linken an gerechnet steht.

S. Was thut das zur Sache?

L. Die Zifern, welche ihre eigentliche oder nur eine einfache Bedeutung haben sollen, stehen gerade nicht immer am Ende zur Rechten, sondern auch oft in der Mitten, ja bisweilen auch zur Linken am Anfange. Wenn sie ihren Platz zur Rechten am Ende erhalten, dann bemerkt man ihren Ort nicht weiter; wenn sie aber in der Mitte oder im Anfange zu stehen kommen, so muß man es thun, weil man sonst ihren Platz nicht wissen würde, und dann thut man es durch ein Comma, welches man neben sie setzt. Dies vorausgesetzt, so werden Sie mir doch nun wohl zugeben, daß ich die vier ersten Zifern richtig durch sechs Tausend, sechs Hundert und sechs und sechszig ausgesprochen habe?

S. Ja das ist alsdann allerdings richtig; aber wie sprechen Sie denn nun die übrigen Zifern aus?

L. Sechs Hundert und sechs und sechszig Tausendtheile.

S. Das verstehe ich noch nicht.

L. Um es zu verstehen, müssen Sie auch die Zahlen etwas genauer betrachten, als sie dieselben wahrscheinlicher Weise bisher betrachtet haben. Nehmen Sie also die Zahl 6666666 noch einmal vor; ich werde darunter einige andere Zahlen schreiben, um darnach eine jede 6 besser anzeigen zu können. Hier ists

6666666
6543210

Die 6, worunter die 0 steht, bedeutet?

S. Sechse.

L. Die, worunter die 1 steht?

S. Sechszig.

L. Also wie vielmal mehr als die mit 0 bezeichnete?

S. Zehnmal mehr.

L. Und die worunter die 2 steht?

S. Diese bedeutet sechs Hundert.

L. Und 600, wie vielmal mehr ist das als 60?

S. Auch zehnmal mehr.

L. Also bedeutet auch die mit 2 bezeichnete 6 wie vielmal mehr als die, die über der 1 steht?

S. Zehnmal mehr.

L.

L. Wenn wir diese Betrachtung fortsetzen, so finden wir, daß jede der folgenden Zahlen, wenn wir nemlich von der Rechten zur Linken fortgehen, zehnmal mehr bedeute als die unmittelbar vorhergehende. Gesetzt nun, wir gehen von der Linken zur Rechten, werden da die folgenden Zahlen auch immer mehr bedeuten?

S. Nein, dann ist es umgekehrt, dann bedeuten die folgenden immer weniger als die vorhergehenden.

L. Und wenn die Zahlen gleich sind, wie in dem Exempel, wie vielmal weniger oder was für einen Theil?

S. Nur den zehnten Theil so viel.

L. Unter den Bedingungen also, welche bey unserer Art die Zahlen zu schreiben, vestgesetzt sind, bedeutet eine jede Zahl, so oft man sie um eine Stelle weiter nach der Linken rückt, zehnmal so viel als vorher, und so oft man sie eine Stelle weiter nach der Rechten versetzt, nur den zehnten Theil von dem, was sie vorher galt. Es kommt also bey unsern Zahlen ganz außerordentlich viel auf die Stelle an, in welcher sie stehen, und wenn ihre Bedeutung nicht ungewiß seyn soll, so muß Eine Stelle bestimmt seyn, in welcher sie ihre eigentliche oder einfache Bedeutung haben. Diese Stelle ist nun entweder die letzte zur Rechten, wenn bey keiner von den daseyenden Zifern ein Comma steht, oder die Stelle der Zifer, nach

welcher ein Comma gesetzt ist. In dieser Zahl z. B.

368245937

hat die 7 nur eine einfache Bedeutung und gilt sieben; die 3 aber gilt schon zehnmal so viel als wenn sie in der Stelle der 7 stünde, und also dreyßig, die folgende 9 neun Hundert, die 5 fünf Tausend u. s. w. In der Zahl

4793,8256

aber steht die 3 in der eigentlichen Bedeutung der Zifern, und mit den vorhergehenden 9, 7 und 4 verhält es sich eben so als vorhin. Die nach dem Comma zur Rechten folgende 8 aber bedeutet nur den zehnten Theil von dem, was sie in der Stelle der 3 angezeigt haben würde, also Zehntheile; die folgende 2 wieder den zehnten Theil von dem, was sie in der Stelle der 8 gegolten haben würde, und also Hunderttheile, und aus gleichem Grunde die 5, Tausendtheile und die 6, Zehntausendtheile u. s. w. Will man die Zahl, die nach dem Comma steht, auf die leichteste Art aussprechen, so darf man sie nur erst wie gewöhnlich lesen, und dann die Bedeutung der letzten Zifer hinzusetzen. Die obige kann man also aussprechen: Acht Tausend, zwey Hundert und sechs und funfzig Zehntausendtheile. Vielleicht sind Sie nun auch schon im Stande ähnliche Zahlen auszusprechen?

S. O ja.

L. Wie sprechen Sie also die Zahl 536,2857 aus? S.

S. Fünf Hundert und sechs und dreyßig, und zwey Tausend, acht Hundert und sieben und funfzig Zehntausendtheile.

L. Wenn man sich die Aussprache und das Schreiben der Zahlen so sehr als möglich erleichtern will, so darf man sich nur folgendes merken:

1. daß es dreyerley Arten von Stellen gebe, welche bey den Zahlen unterschieden werden müssen, nemlich die Stelle der Zahlen, die in der einfachen Bedeutung stehen, ferner die Stellen derjenigen, die 10, 100, 1000mal mehr als jene bedeuten, und endlich die Stellen derer, die nur Zehntheile, Hunderttheile, Tausendtheile u. s. w. anzeigen. Wenn man diese Stellen noch weiter bestimmen will, so nennt man die Stelle der Zahlen, die in der einfachen Bedeutung stehen, die Stelle 0, die Stellen der Zahlen, die 10, 100, 1000mal u. s. w. mehr bedeuten die höhern, und die übrigen endlich die niedern Stellen, und zählt jene so wohl als diese von der Stelle der Zahl, die in der einfachen Bedeutung steht, an, so als folgendes Beyspiel es zeigt

659834, 269357
543210 123456

2. daß es der Bedeutung nach dreyerley Arten von Zifern gebe, Einer nemlich, oder Zifern von der Ordnung Null, diese haben die einfache Bedeutung der Zifern; ferner Zehner oder Zifern von der höhern Ordnung, diese bedeuten 1, 10, 100,

 1000,

1000, 10000 mal so viel als die Einer, und endlich Zifern von der niedern Ordnung oder Zehntheiler, welche nur den 10ten, 100sten, 1000sten Theil u. s. w. anzeigen. Folglich stehen in der Stelle 0 die Einer, und

in den höhern Stellen	die Zahlen der 1ten höhern	oder
in der 1ten	Ordnung	die Zehner
— — 2 —	— 2ten — —	die Hunderter
— — 3 —	— 3ten — —	die Tausender
— — 4 —	— 4ten — —	die Zehntausender
— — 5 —	— 5ten — —	die Hunderttausender
— — 6 —	— 6ten — —	die Millioner
— — 7 —	— 7ten — —	die Zehnmillioner
— — 8 —	— 8ten — —	die Hundertmillioner
— — 9 —	— 9ten — —	die Tausendmillioner
— — 10 —	— 10ten — —	die Zehntausendmillioner
— — 11 —	— 11ten — —	die Hunderttausendmillioner
— — 12 —	— 12ten — —	die Billioner u. s. w.

in den niedern Stellen	die Zahlen der ersten niedern Ordnung	
in der 1ten		die Zehntheiler
— — 2 —	der 2ten — —	die 100theiler
— — 3 —	— 3ten — —	die 1000theiler
— — 4 —	— 4ten — —	die 10000theiler
— — 5 —	— 5ten — —	die 100000theiler
— — 6 —	— 6ten — —	die 1000000theiler
— — 7 —	— 7ten — —	die 10000000theiler
— — 8 —	— 8ten — —	die 100000000theiler
— — 9 —	— 9ten — —	die 1000000000theiler
— — 10 —	— 10ten — —	die 10000000000theiler
— — 11 —	— 11ten — —	die 100000000000theiler
— — 12 —	— 12ten — —	die 1000000000000theiler
u. s. w.		

Hat man sich dies recht bekannt gemacht, so ist es leicht jede gegebene Zahl auszusprechen, vorausgesetzt indeß, was hier muß vorausgesetzt werden können,

können, daß die Aussprache dreyer neben einander stehenden Zifern bekannt sey. Man darf alsdann nur, wenn man keine Zehntheiler hat, die Zifern überzählen, ihre Zahl durch 3 theilen, so viel als übrig bleibt, zuerst, und nachher immer 3 und 3 Zahlen zusammen aussprechen. Setzt man dann die Worte Tausend, Millionen, Billionen u. s. w. an den gehörigen Orten hinzu, Tausend nemlich zur 3ten, 9ten, 15ten, 21ten u. s. Ordnung, und Million zur sechsten, Billion zur 12ten, Trillion zur 18ten Ordnung u. s. w., so geschieht alles auf die erforderliche Art. Gesetzt z. B. ich sollte folgende Zahlen aussprechen

6943709458002395642392; so zählte ich vor allen Dingen die Zifern über und fände 22. Nun theilte ich 22 durch 3, wo ich 7 erhielte, und 1 übrig bliebe. Die 6 im Anfange gehörte also zur 21ten Ordnung, und ich würde also die ganze Zahl aussprechen: 6 Tausend, 943 Trillionen, 709 Tausend, 458 Billionen, 2 Tausend 395 Millionen, 642 Tausend, 392. Man giebt zwar sonst den Rath, daß man die auszusprechende Zahl von den Einern an durch Commata in Classen, jede zu 3 Zifern theilen, und dann auch die 3te, 5te, 7te Classe u. s. w. noch überdem oben durch ein Zeichen bemerken, und dann erst aussprechen solle, als

4,943,709,458,002,395,642,392; allein nicht immer ist es erlaubt diese Abtheilungen wirk-

lich zu machen, und jene Art ist überdem kürzer. — Hat man nun auch Zehntheiler, so spricht man, wie schon gesagt, ihre Zifern erst nach dem bisherigen aus, und setzt alsdann noch den Werth der letzten Zifer hinzu. Z. B. 634,93287654 hieße 634, und 93 Millionen, 287 Tausend 654 Hundertmillionentheile. — Aber wie wird folgende Zahl ausgesprochen, 0,068?

S. Das weiß ich nicht.

L. Einer und Zahlen von der höhern Ordnung sind hier nicht, das zeigt die 0 vor dem Comma an; also haben Sie auch nur nöthig die Zehntheiler nach dem angeführten auszusprechen.

S. Nun weiß ich es, es sind 68 Tausendtheile.

L. Nun habe ich nicht nöthig, weitläuftig über die Art, eine ausgesprochene Zahl zu schreiben, mit Ihnen zu reden. Die Regel dabey ist: Man schreibe eine jede Zifer in die Stelle, welche ihr ihrem Werth nach zukömmt, und fülle die Stellen, für welche man keine bedeutende Zifer hat, mit 0 an *). Aber noch eine Art, die Ordnungen,

*) Es kommt bey der Fertigkeit ausgesprochene Zahlen zu schreiben eben so als bey der Fertigkeit geschriebene Zahlen auszusprechen vorzüglich auf solche Uebungen an, bey welchem der Lehrling immer von dem leichtern stufenweise zu dem schwerern geführt wird. Wer dergleichen Uebungen mit Lehrlingen

nungen, zu welchen eine Zifer gehören soll, anzuzeigen, die uns sehr zu statten kommen soll, ohnerachtet sie bis jetzt eben nicht gebraucht ist, will ich Ihnen dagegen sagen. Man schreibt neben diese Zifer oben zur Rechten die Zahl der Ordnung, aber in kleinerer Form und unterstrichen, und wenn die Ordnung eine niedere ist, so setzt man noch das Zeichen — vor. Wie würden Sie 6 in der 7ten höhern Ordnung oder sechszig Millionen schreiben.

S. So. 60000000.

L. Nach dem angeführten kann man es auch so machen. $6^{\underline{7}}$. Schreiben Sie hiernach einmal 8 in der 5ten höhern Ordnung.

S. Hier ist es $8^{\underline{5}}$.

L. Und was heißen also diese Ausdrücke $7^{-\underline{3}}$, $9^{\underline{4}}$, $3^{\underline{0}}$, $5^{-\underline{8}}$.

S. 7 in der 3ten niedern Ordnung, 9 in der 4ten höhern Ordnung, 3 in der Ordnung 0, und 5 in der 8ten niedern Ordnung.

L. Man gebraucht in der Mathematik oft das Zeichen $=$, welches ist gleich, oder ist eben so viel als bedeutet. Lesen Sie darnach einmal folgendes: $8^{\underline{3}} = 8000$, $3^{\underline{0}} = 3$, $6^{-\underline{2}} = 0{,}06$.

lingen anzustellen hat, wird aus dem gesagten das, was ich, um nicht gar zu weitläuftig zu werden, nicht berührt habe, schon selbst herzuleiten im Stande seyn.

S. 8 in der 3ten höhern Ordnung ist so viel 8000, 3 in der Ordnung 0 ist gleich 3, 6 in der 2ten niedern Ordnung ist gleich 6 Hunderttheilen.

L. Gut. Da Sie dies gefaßt zu haben scheinen, so will ich Ihnen verschiedene Zahlen aufgeben, welche Sie nach demselben auf eine andere Art auszudrücken suchen sollen. Sie schreiben nemlich neben das Zeichen =, was dem gesagten nach daneben wird gesetzt werden müssen.

$4^{\underline{0}} =$	$6000 =$
$6^{\underline{3}} =$	$0,6 =$
$9^{\underline{2}} =$	$40000 =$
$7^{\underline{4}} =$	$500 =$
$9^{\underline{8}} =$	$6000000 =$
$7^{\underline{2}} =$	$30 =$
$3^{\underline{8}} =$	$0,007 =$
$5^{\underline{7}} =$	$5. =$
$9^{-\underline{3}} =$	$0,0008 =$
$8^{-\underline{5}} =$	$0,09 =$
$7^{-\underline{3}} =$	$0,0000007 =$
$5^{\underline{6}} =$	$400000 =$
$8^{\underline{5}} =$	$400000 =$
$5^{-\underline{4}} =$	$700 =$
$5^{\underline{7}} =$	$30 =$
	$0,0008 =$

Der Anfang muß werden.

$4^{\underline{0}} = 4$	$600 = 6^{\underline{2}}$
$6^{\underline{3}} - 6000$	$0,6 = 6^{-\underline{1}}$.

Morgen wollen wir in der Numeration weiter fortfahren.

S.

S. Also sind wir noch nicht fertig?

L. Wir wollen sehen.

Viertes Gespräch.

L. Sie glauben also, daß wir mit der Numeration schon ganz zu Stande gekommen sind?

S. Ich dachte es, weil Sie nicht nur alles das, was ich sonst in der Numeration gehabt habe, sondern auch noch einiges, mir vorher ganz unbekannte, durchgenommen haben.

L. Von was für Zahlen habe ich Ihnen denn gestern die Art sie auszusprechen und zu schreiben gezeigt? etwa schon von allen den Arten, die Sie neulich kennen gelernt haben?

S. Müssen wir denn alle diese Arten durchnehmen?

L. Wie würden wir in der Folge im Stande seyn, die Veränderungen derselben zu untersuchen, wenn wir uns nicht vorher über die Art sie zu schreiben und auszusprechen bekümmert hätten?

S. Alsdann haben wir noch viel übrig.

L. Und was für Zahlen werden jetzt zunächst betrachtet werden müssen?

S. Die Divisoren, denn bisher haben Sie nur erst von den Multiplicatoren mit mir geredet.

L. Etwas habe ich doch auch schon von den Divisoren gesagt?

S. Ja, nemlich daß man sie mit den gewöhnlichen Zifern schreibe, aber darüber noch eine 1 setze, und zwischen beyde einen Querstrich mache. Allein dadurch weiß ich doch von der Art der Divisoren zu schreiben und auszusprechen nicht mehr, als ich vorher, ehe Sie mit mir von den Multiplicatoren gesprochen hatten, von diesen wußte, und gleichwohl haben Sie mir von diesen so viel noch gesagt.

L. Sie urtheilen ganz richtig, wenn Sie auf diese Art glauben, daß ich von der Art die Divisoren zu schreiben und auszusprechen ebenfalls noch besonders mit Ihnen reden müsse. Indeß kann ich mich doch, nach dem, was ich von den Multiplicatoren in dieser Absicht gesagt habe, bey den Divisoren kurz fassen. Es kommt nemlich nur darauf an, daß Sie Sich merken, wie man nach der verschiedenen Art die Multiplicatoren zu schreiben auch die Divisoren verschiedentlich ausdrucken kann. Dazu werden einige Exempel hinreichend seyn. Wie kann man also auch 6000 schreiben.

S. $6^{\underline{3}}$.

L. Und also $\frac{1}{6000}$.

S. $\frac{1}{6^{\underline{3}}}$.

L. Und 0,03.

S. $3^{-\underline{2}}$.

L. Also $\frac{1}{0,03}$.

S. $\frac{1}{3^{-2}}$.

L. Aber nun noch eins, was so wohl die Multiplicatoren als die Divisoren betrift. Man spricht bisweilen nicht von dieser oder jener bestimmten Zahl, sondern von Zahlen überhaupt, so daß es alsdann gleich viel ist, was man für eine Zahl sich dabey denken will. Z. B. Wenn ich zu einer Zahl, was für eine es auch sey, irgend eine andere hinzuzähle, die der vorhergehenden nicht entgegengesetzt ist, kommt alsdann mehr heraus, als jede dieser Zahlen beträgt, oder weniger? Wenn man in dergleichen Fällen immer die Worte, eine gewisse Zahl, was für eine es auch sey, irgend eine Zahl u. d. gl. gebrauchen wollte, so würde man sehr weitläuftig und undeutlich, ja oft gänzlich unverständlich sprechen und schreiben müssen, und es würde das noch viel unbequemer seyn, als wenn man statt der Zifern, die Sie kennen, immer die Worte, mit welchen man sie ausspricht, schreiben wollte. Wäre es also nicht gut, wenn man auch in diesem Falle gewisse Zeichen hätte?

S. O ja!

L. Und man hat auch dergleichen bereits eingeführt. Man gebraucht nemlich zu diesen Zeichen die Buchstaben, und vorzüglich die kleinen lateinischen. Wenn ich daher künftig von einer Zahl a spre=

sprechen werde, so können Sie Sich darunter eine Zahl gedenken, was für eine Sie wollen, und eben das stellen Sie Sich unter der Zahl b, oder der Zahl c u. s. w. vor, nur mit dem Unterschiede, daß Sie Sich unter einerley Buchstaben immer dieselbe Zahl, unter verschiedenen Buchstaben aber auch verschiedene Zahlen gedenken.

S. Wozu nützt denn das aber?

L. Einmal dazu, daß man sich viel kürzer, bequemer und deutlicher ausdrücken kann, wenn nicht von dieser und jener bestimmten Zahl, sondern von Zahlen überhaupt die Rede ist, so wie ich das schon vorhin gesagt habe; und dann hat es noch mancherley andere Vortheile, die ich Ihnen aber jetzt noch nicht deutlich machen kann. In der Folge werden Sie dieselben kennen lernen, und zwar desto mehr, je weiter Sie kommen. Eins anzuführen, was ich aber jetzt auch bloß anführen, noch nicht beweisen kann, so ist man, wenn man die Buchstaben zu gebrauchen gelernt hat, nicht nur im Stande, Regeln, die, mit Worten ausgedruckt, ganze Seiten ausfüllen würden, in Einer Reihe vorzustellen, sondern man kann dadurch selbst die Regeln, welche man gebraucht, ausrechnen, wenn man sie noch nicht weiß, oder sie etwa wieder vergessen hat.

S. Das ist mir unbegreiflich.

L. Es soll Ihnen schon begreiflich werden, nur Geduld. Merken Sie Sich nur das jetzt sorgfältig,

fältig, was ich Ihnen von der Bedeutung der Buchstaben gesagt habe, nemlich, daß man sich unter jedem Buchstaben, was für eine Zahl man wolle, gedenken könne, daß man aber unter einerley Buchstaben auch einerley, und unter verschiedenen Buchstaben verschiedene Zahlen gedenken müsse. In der Mathematik gebraucht man daher die Buchstaben anders, als z. B. die Buchhändler und manche Kaufleute. Bey den Buchhändlern bedeuten die kleinen Buchstaben Groschen und die großen Thaler, und A also 1 Thlr., a aber 1 Gr., B 2 Thlr. b 2 Gr., C 3 Thlr, c 3 Gr. u. s. w. Hier haben also die Buchstaben einen bestimmten Werth. Manche Kaufleute aber geben den Buchstaben zwar auch einen bestimmten Werth, aber nicht nach der Ordnung, in welcher sie im Alphabete folgen. Die Buchhändler thun das vielleicht, weil sie die Bogen der Bücher nach den Buchstaben zählen, und ihnen also diese Zählungsart geläufig ist; die Kaufleute hingegen wollen sich dadurch gern den Preis ihrer Waaren so anmerken, daß nur sie und kein anderer daran erkennen könne, für wie viel sie dieselbe lassen können. Wenn wir auf eine ähnliche Art die Buchstaben brauchen wollten, so würden wir sehr thöricht handeln, denn alsdann fiele der vorhin angezeigte Nutzen gänzlich weg. — Sollten Sie mir nur wohl sagen können, wie man überhaupt einen Multiplicator anzeigt?

S. Durch irgend einen Buchstaben, a z. B. oder b oder c u. s. w.

L. Und einen Divisor?

S. Mit denselben Buchstaben, nur mit dem Unterschiede, daß man darüber 1 und zwischen die 1 und den Buchstaben einen Strich setzt, z. B. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ u. s. w. Nicht wahr?

L. Ganz recht. Aber wie zeigen Sie denn nun wohl einen Multiplicator von der 3ten höhern Ordnung an?

S. So: a^3 oder b^3 oder c^3 u. s. w.

L. Und einen Divisor von derselben Ordnung?

S. $\frac{1}{a^3}$ oder $\frac{1}{b^3}$ oder $\frac{1}{c^3}$ u. s. w.

L. Wie ferner einen Multiplicator von der 5ten niedern Ordnung?

S. Auf diese Art: a^{-5}, oder b^{-5} oder c^{-5} u. s. w.

L. Und einen Divisor von derselben Ordnung?

S. So: $\frac{1}{a^{-5}}$ oder $\frac{1}{b^{-5}}$ oder $\frac{1}{c^{-5}}$ u. s. w.

L. Sie wissen Sich bis jetzt recht gut zu finden. Allein wie würden Sie denn nun wohl verschiedene Multiplicatoren, die eben so als unsre gewöhnlichen Zahlen zu verschiedenen Ordnungen gehörten und zusammen genommen oder gedacht werden sollten, ausdrucken? Ich will mich erst deutlicher erklären. Die Zahl 634 ist ein Multi-

plica-

plicator, und besteht aus drey Zifern, davon die 6 zur 2ten, die 3 zur 1ten höhern Ordnung und die 4 zur Ordnung 0 gehört. Wenn ich aber diese 3 Zifern 634 lese, so denke ich mir dabey nur eine Zahl. Gesetzt nun, ich wollte diesen Multiplicator allgemein ausdrücken, also statt jeder bestimmten Zifer in demselben einen Buchstaben nehmen, wie würde ich das machen müssen?

S. Ich setzte $a^{2}b^{1}c^{0}$.

L. Dieser Ausdruck würde, wie Sie in der Folge lernen werden, ganz etwas anders bedeuten; und Sie müssen noch etwas dazu setzen, wovon Sie den Grund leicht einsehen werden. Es sind in dem Multiplicator, dessen einzele Theile Sie durch a^{2}, b^{1} und c^{0} ausdrucken, diese drey Theile da, und daher setzt man zwischen diese Theile das Zeichen +. Also würde das vorhergehende geschrieben werden müssen?

S. Auf diese Art: $a^{2}+b^{1}+c^{0}$.

L. Recht. Bisweilen schließt man auch alle solche Theile Einer Zahl in eine Parenthese ein, so wie Sie es hier sehen. $(a^{2}+b^{1}+c^{2})$. Nun schreiben Sie mir noch einen Multiplicator, der aus 6 Theilen bestehe, und wovon der erste zur 5ten höhern Ordnung gehöre, und jeder der folgenden in einer um 1 niedrigen Ordnung stehe, als der vorhergehende.

S. Einen solchen Multiplicato schreibt man entweder $a^{5}+b^{4}+c^{3}+d^{2}+e^{1}+f^{0}$, oder $(a^{5}+b^{4}+c^{3}+d^{2}+e^{1}+f^{0})$

L. Nun können wir zu einer andern Art der Zahlen fortgehen. Was folgt für eine?

S. Die Multiplicatorproducte.

L. Von den Producten überhaupt, so wohl von den Multiplicator= als den Divisorproducten habe ich Ihnen nur nöthig zu sagen, daß man sie, um sie als Producte zu schreiben, ihre Factoren hinsetzt, und dazwischen das Zeichen $\times$ oder . schreibt, wenn diese Factoren durch Zifern ausgedruckt werden; werden sie aber durch Buchstaben angezeigt, so schreibt man nur die Buchstaben, welche die Factoren vorstellen, neben einander. Hier sind einige Beyspiele.

2×3 ist ein Multiplicatorproduct aus den Factoren = = . 2 und 3
$2\times 4\times 6$ = = = 3 u. 4 u. 6
ab = = = a u. b
abcde = = = a u. b u. c u. d u. e
$\frac{1}{3\times 6}$ ist ein Divisorproduct aus den Factoren = = $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{5\times 4\times 6}$ = = = $\frac{1}{5}$ u. $\frac{1}{4}$ u. $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{abc}$ = = = $\frac{1}{a}$ u. $\frac{1}{b}$ u. $\frac{1}{c}$
$\frac{1}{defg}$ = = = $\frac{1}{d}$ u. $\frac{1}{e}$ u. $\frac{1}{f}$ u. $\frac{1}{g}$.

S. Das ist nicht schwer.

L.

L. Ich werde mich auch dabey nicht länger aufhalten, sondern sogleich zu der folgenden Art der Zahlen fortgehen. Was sind das für welche?

S. Die Dignitäten.

L. Wie viel Arten giebt es davon?

S. Zwey; Multiplicatordignitäten, und Divisordignitäten.

L. Eine Art beyde Gattungen von Dignitäten zu schreiben können Sie aus dem vorherhenden leicht selbst herleiten. Dignitäten sind nemlich immer Producte aus gleichen Factoren, und die 2te Dignität ein Product aus 2 gleichen Factoren, die 3te Dignität ein Product aus 3 gleichen Factoren, die 4te Dignität ein Product aus 4 gleichen Factoren u. s. w. und je nachdem diese Factoren, Multiplicatoren oder Divisoren sind, je nachdem ist auch die Dignität eine Multiplicator- oder Divisordignität. Versuchen Sie also einmal die 2te Multiplicatordignität von 2 zu schreiben.

S. 2×2.

L. Und die 3te Multiplicatordignität von 4?

S. $4 \times 4 \times 4$.

L. Wie schreiben Sie die 2te Divisordignität von 3?

S. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{3 \times 3 \times 3}$.

L. Und die 4te Divisordignität von 5?

S. $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$, oder $\frac{1}{5\times5\times5\times5}$.

L. Wie nun aber die 6te Multiplicatordignität von irgend einer Zahl, was für eine es sey?

S. aaaaaa, oder bbbbbb oder cccccc u. s. w.

L. Und die 8te Divisordignität von irgend einer Zahl?

S. $\frac{1}{aaaaaaaa}$ oder $\frac{1}{bbbbbbbb}$ u. s. w.

L. Richtig sind diese Ausdrücke allerdings, aber unbequem würden sie, oft insbesondere bey den aus vielen Factoren bestehenden Dignitäten, seyn. Man hat daher eine andere Art, die Dignitäten zu schreiben erwählt, wobey das wesentliche folgendes ist. Man setzt einen von den Factoren, aus welchen die Dignität besteht, oder die Wurzel nur einmal hin, und zeigt durch eine kleinere oben neben der Wurzel zur Rechten geschriebene Zifer die Anzahl der Factoren, oder die wie vielste Dignität man sich gedenken solle, an. Die vorhergehenden Beyspiele würden darnach so geschrieben werden müssen:

2^2 a^6, b^6, c^6.

4^3

$\frac{1}{3}^3$ oder $(\frac{1}{3})^3$ oder $\frac{1}{3^3}$, $\frac{1}{a^8}$, $\frac{1}{b^8}$ u. s. w.

$\frac{1}{5}^4$ oder $(\frac{1}{5})^4$ oder $\frac{1}{5^4}$.

Im

Ja die Divisordignitäten zu schreiben giebt es eine noch bequemere Art. Anstatt

$\frac{1}{3^3}$, schreibt man 3^{-3}
$\frac{1}{5^4}$ — — 5^{-4}
$\frac{1}{a^6}$ — — a^{-6}
$\frac{1}{b^8}$ — — b^{-8}. Die kleinere Zahl, welche auf diese Art neben der Wurzel steht, heißt nun, wie ich schon einmal bemerkt habe, der Exponent oder der Logarithme der Dignität, und er ist sehr, wie Sie solches in der Folge auf das deutlichste sehen werden, von den Zahlen unterschieden, welche die Ordnung der Zifern anzeigen. Aus die- diesem Grunde habe ich daher auch diese letztern immer unterstrichen, welches ich bey den Exponenten oder Logarithmen nicht gethan habe. — Was ist nun noch übrig?

S. Nun sind wir fertig.

L. Dies Zeichen √ müssen Sie Sich noch merken. Man nennt es das Wurzelzeichen, und seine Bedeutung werden Sie aus folgenden Beyspielen ersehen

$\sqrt{4}$ heißt die 2te Wurzel aus 4
$\sqrt[3]{8}$ — — 3te — — 8
$\sqrt[4]{32}$ — — 4te — — 32 u. s. w.

Hier können wir fürs erste die Numeration schliessen, ob Sie gleich in der Folge noch manche andere Art die Zahlen auszudrucken, ja auch selbst

das bisherige ganz deutlich einzusehen, werden lernen müssen. In unsrer nächsten Unteredung wollen wir nun die einfachen Rechnungsarten oder die leichtesten Arten aus einigen Zahlen gewisse verlangte andere zu machen kennen zu lernen suchen.

Fünftes Gespräch.

L. Ich erhielt gestern von einem Kaufmanne folgende Rechnung;

Berlin den 10. Febr. 1783

Nota!

	$2\frac{1}{4}$ El. weißl. super fein $\frac{2}{4}$ br. Tuch a $4\frac{3}{4}$ Thlr.	10 : 16 : 6
den 28ten d.	$4\frac{1}{2}$ El. Couleur de Bois f. Tuch — 36 Gr.	6 : 18 —
	$5\frac{1}{2}$ El. d. Challon 11 Gr.	2 : 12 : 6
den 18ten Merz	5 El. weißl. d. 11 Gr.	2 : 7 —
		Rthlr. 22 : 6

Das war so weit recht gut, daß der Kaufmann die verschiedenen Posten, die ich ihm schuldig war, am Ende in eine Summe zusammen gezogen hatte; aber wenn er es nicht gethan hätte, so hätte ich ihm erst 10 Rthlr. 16 Gr. 6 Pf., dann 6 Rthlr. 18 Gr.

Gr., dann 2 Rthlr. 12 Gr. 6 Pf. und endlich 2 Rthlr. 7 Gr. aufgezahlt, und so wäre die Rechnung ebenfalls abgethan gewesen.

S. Bey solchen kleinen Rechnungen geht das wohl an, aber bey großen Rechnungen würde es sehr beschwerlich seyn.

L. Ich bezahlte diese Rechnung in Golde und rechnete jeden Friedrichsd'or zu 5 Rthlr. 8 Gr.

S. O dann ist es sehr gut gewesen, daß Sie die ganze Summe mit einem Male und nicht so einen Theil nach den andern bezahlt haben. Denn wenn Sie die 10 Rthlr. 16 Gr. und 6 Pf. hätten bezahlen wollen, so hätten Sie müssen 3 Friedrichsd'or geben, und der Kaufmann hätte Ihnen dann 5 Rthlr. 7 Gr. und 6 Pf. wieder gegeben. Dann hätten Sie wieder einen Friedrichsd'or und 1 Rthlr. und 10 Gr. und 6 Pf., und dann 2 Rthlr. 12 Gr. 6 Pf. und dann endlich 2 Rthlr. 7 Gr. gegeben, aber diese beyden Summen aufzählen müssen. Weit geschwinder sind Sie fertig geworden, indem Sie dem Kaufmann mit einem Male 4 Friedrichsd'or und 22 Gr. in Münze bezahlt haben.

L. Ich hätte es ja aber, um des Wechselns und Zählens überhoben zu seyn, so machen können. Ich hätte dem Kaufmann gesagt: Hier sind 3 Friedrichsd'or, davon bezahle ich die ersten 10 Rthlr. 16 Gr. 6 Pf. und behalte also 5 Rthlr. 7 Gr. und 6 Pf. gut; nun gebe ich Ihnen noch einen Friedrichsd'or, und rechne von den vorhin übrig gebliebenen

5 Rthlr. 7 Gr. und 6 Pf., 1 Rthlr. 10 Gr. und 6 Pf. dazu, so sind nun auch die 6 Rthlr. 18 Gr. bezahlt, und ich behalte noch 3 Rthlr. und 21 Gr.; davon rechne ich nun die 2 Rthlr. 12 Gr. und 6 Pf. ab, so daß also 1 Rthlr. und 8 Gr. 6 Pf. bleiben, und dazu lege ich endlich noch 22 Gr. und 6 Pf., welche mit den 1 Rthlr. und 8 Gr. und 6 Pf., 2 Rthlr. 7 Gr. machen, und so sind wir quit.

S. Man wird aber viel geschwinder fertig, wenn man die einzeln Summen auf dem Papiere zusammen rechnet, und wenn ich auf die Art, wie Sie eben jetzt gesagt haben, eine nur eben so große Rechnung bezahlen sollte, ich könnte nicht davor stehen, daß ich mich nicht verrechnete. Und dabey fällt mir noch eins ein. Man hebt doch dergleichen Rechnungen auf, um zu einer andern Zeit daraus ersehen zu können, wie viel man bezahlt habe. Gesetzt nun, daß alsdann die einzeln Posten nicht in eine Summe zusammen gezogen worden wären, so müßte man jedesmal von neuem überrechnen.

L. Also halten Sie es doch für nützlich, mehrere Summen, die zusammen gehören, in eine einzige zu verwandeln, welche den vorigen zusammen genommen gleich ist?

S. Ja, das ist sehr nützlich, und um so viel nothwendiger, je größer die Anzahl jener Summen ist, die zusammen gehören.

L. Was versteht man denn unter der Addition?

S. Unter der Addition versteht man die Verwandlung verschiedener Summen in Eine, die jenen zusammen genommen gleich ist.

L. Ich habe gestern früh 5 Rthlr. und nach Mittag 3 Rthlr. 12 Gr. eingenommen, dagegen aber 4 Rthlr. und nachher noch 2 Rthlr. ausgegeben, wie viel habe ich also übrig behalten?

S. 2 Rthlr. 12 Gr.

L. 5 Rthlr. und 3 Rthlr. 12 Gr. Einnahme, und 4 Rthlr. und 2 Gr. Ausgabe, wie viel geben die also Vermögen?

S. 2 Rthlr. 12 Gr.

L. Und ob jemand 2 Rthlr. 12 Gr. hat, oder 5 Rthlr. und 3 Rthlr. 12 Gr. einnimmt, so doch, daß er davon sogleich 4 Rthlr. und 2 Rthlr. wieder ausgeben muß, das ist auch wohl einerley?

S. Ja.

L. Und also sind 2 Rthlr. 12 Gr. Vermögen eben so viel als 5 Rthlr. und 3 Rthlr. 12 Gr. Einnahme mit 4 Rthlr. und 2 Rthlr. Ausgabe zusammen genommen?

S. Ja.

L. Haben Sie bey dieser Rechnung nicht auch mehrere Größen, denn diesen Ausdruck wollen wir statt des Ausdrucks Summen hier setzen, in Eine Summe verwandelt, die jenen Größen zusammen genommen gleich ist?

S. Ja.

L. Haben Sie aber addirt?

S. Nein, ich habe addirt und subtrahirt.

L. Wie so?

S. Ich rechnete: 5 Rthlr. und 3 Rthlr. 12 Gr. Einnahme machen 8 Rthlr. 12 Gr., und 4 Rthlr. und 2 Rthlr. Ausgabe machen 6 Rthlr.; 6 Rthlr. nun von 8 Rthlr. 12 Gr. abgezogen bleiben 2 Rthlr. 12 Gr.

L. Ist also die Addition vollständig genug erklärt, wenn man sagt, man verstehe darunter die Verwandelung mehrerer Größen oder Zahlen in Eine, die jenen zusammen genommen gleich ist?

S. Nein, ich glaube man muß dazu setzen, nicht entgegen gesetzte.

L. Ganz recht, und also nun noch einmal gesagt, was man unter der Addition zu verstehen habe?

S. Man versteht darunter die Verwandelung verschiedener Größen oder Zahlen, die einander nicht entgegen gesetzt sind, in Eine, die jenen zusammen genommen gleich ist.

L. Diese Erklärung suchen Sie Sich zu merken, und dabey auch zu gleicher Zeit, daß man eine gleiche Verwandelung verschiedener entgegen gesetzter Größen oder Zahlen nicht so wohl Addition als Vereinigung nennt. Von dieser Vereinigung werden wir ebenfalls mit einander reden, aber

jetzt

jetzt wollen wir fürs erste bey der Addition stehen bleiben.

S. Addiren habe ich schon recht gut gelernt.

L. Desto besser, denn alsdann können wir um so viel geschwinder zur Subtraction fortgehen. Einen kleinen Versuch wollen wir aber doch machen. Nehmen Sie also folgende Zahlen zur Hand

3,	7,	8,	5,	6,	8,	7,	3,	5,	9,	7,	6,	3,	2,	1,	4,
4	9	6	4	2	3,	4	5	7	3	8	2	5	3	6	4

6,	5,	9,	3,	8,	7,	5,	2,	1,	6,	3,	4,	7,	2,	9,	3,	8,
4	3	9	8	7	4	3	6	8	2	5	3	9	8	7	6	5

34,	32,	94,	16,	31,	56,	39,	24,	34,	52,	46,
4	4	9	8	7	9	8	6	5	4	3

76,	58,	39,	86,	54,	79,	47,	38,	75,	19,
8	7	5	7	9	3	8	7	5	6

87,	39,	44,	36,	55,	98,	32,	70,	33,	54,
3	6	5	9	3	8	7	5	9	6

97,	38,	57,	34,	38,	26,	82,	81,	53,
9	7	6	5	7	9	3	8	7

Ich

Ich habe mir dieselben Zahlen aufgeschrieben, und nun wollen wir mit einander um die Wette rechnen.

S. Das sind lauter kleine Exempel, da will ich bald mit fertig seyn.

L. Gut. (Lehrer und Schüler rechnen nun, der Lehrer schreibt eine Summe nach der andern, ohne an einem Orte sich zu besinnen, hin, und indem er sagt, ich bin fertig, ist der Schüler ohngefehr bis auf die Hälfte gekommen.)

S. So geschwinde kann ich nicht.

L. Addiren Sie nur erst bis ans Ende.

S. (Nach einer Weile.) Nun bin ich fertig.

L. (Sieht die herausgebrachten Summen nach, und bemerkt einige Fehler.) Hie und da haben Sie auch gefehlt, wie ich sehe; insbesondere gegen das Ende.

S. Zuletzt sind auch die Exempel schon etwas schwerer als im Anfange, und dann suchte ich zu eilen, um bald fertig zu werden.

L. Also haben Sie Sich noch dazu anstrengen müssen, um geschwinde fertig zu werden? Wenn Sie es nicht übel nehmen wollen, so muß ich Ihnen sagen, daß Ihnen noch sehr viel fehlt, ehe Sie sagen können: addiren kann ich recht gut. Von solchen Exempeln, als ich Ihnen gegeben habe, müssen Sie zum allerwenigsten die Summen hin-

ter einander ohne Fehler und so geschwinde hinschreiben können, daß Niemand es Ihnen anzumerken im Stande ist, daß Sie rechnen. Um dies zu lernen, schreiben Sie Sich oft ganze Seiten von dergleichen Exempeln voll, und rechnen Sie selbige dann so geschwind als Sie können, und setzen Sie diese Uebung so lange fort, bis Sie zum wenigsten eben die Fertigkeit haben, mit der ich rechnete. Anfänglich werden Sie freylich hie und da Fehler machen. Aus dieser Ursache wird es gut seyn, die Summen, welche Sie gefunden haben, nach der ersten schnellen Ausrechnung noch einmal langsam durchzugehen, und sie zu prüfen. Sehr angenehm sind dergleichen Uebungen an und für sich nicht, aber die Fertigkeit, die man sich dadurch erwirbt, die verschafft hinterher für die Mühe, die man sich ihretwegen gegeben, Vergnügen. Auch will ich Ihnen außerdem noch eine Uebung anrathen. Schreiben Sie Sich auch bisweilen solche Reihen von Zahlen auf, als Sie hier sehen.

	3	
6	5	3
8	8	4
3	3	7
4	2	2
5	7	1
7	9	8
9	6	4
3	3	2
7	5	7
8	4	3
6	2	5
5	8	4
4	3	2
3	7	8
2	9	1
9	5	2
8	7	6
7	3	1
6	6	1
5	9	1
4	4	3
9	1	9
3	9	5
8	1	8
5	2	6
4	7	4
2	8	2
3	9	2
9	4	2
5	5	9
6	6	6
7	3	5
8	7	4

und

und suchen Sie dieselben so geschwind als möglich auszurechnen. Sie müssen aber alsdann nicht sagen, um die erste Reihe z. B. zu nehmen, 8 und 7 ist 15, und 6 ist 21 und 5 ist 26 u. s. w., sondern so wie Sie mit dem Finger oder einer Feder die Zahlen hinaufgehen, müssen Sie gleich sagen, 8, 15, 21, 26, 35, 38, 40, 44, 49, 57, 60, 69, 73 u. s. w. Wenn Sie auf diese Art von unten hinauf addirt haben, so können Sie dann auch von oben herunter addiren, und stimmen die beyden Summen, welche Sie erhalten, überein, so können Sie daraus mit vieler Wahrscheinlichkeit schließen, daß Sie keinen Fehler begangen haben. Auch diese Uebung müssen Sie so oft vornehmen, und so lange fortsetzen, bis Sie so schnell addiren können, als ob Sie die nach einander entstehenden Summen nur herläsen. — Nun sagen Sie mir einmal, wie Sie folgendes Exempel addiren

$$\begin{array}{r} 89 \\ \underline{78} \end{array}$$

S. Ich sage: 8 und 9 ist 17, 7 hin und 1 in Sinn, 1 und 7 ist 8, und noch 8 dazu macht 16, und also ist die Summe 167.

L. Und folgendes.

$$\begin{array}{r} 839 \\ \underline{472} \end{array}$$

S. 2 und 9 ist 11, 1 hin und 1 im Sinn, 1 und 7 ist 8 und 3 ist 11, 1 hin und 1 im Sinn,

1 und 4 ist 5 und 8 ist 13, und die ganze Summe ist also 1311.

L. So können Sie immerhin rechnen, wenn die Exempel aufgeschrieben sind; aber wenn Sie dergleichen im Kopfe ausrechnen sollen, so werden Sie bey dieser Art sehr häufig sich irren.

S. Wie kann ich denn aber anders rechnen?

L. Fürs erste müssen Sie eben so fertig, als Sie nach dem vorhergehenden Einer müssen addiren können, auch die Zehner zu addiren Sich bekannt machen. Sie können darin auf eben die Art Sich üben als vorhin, wenn Sie solche Exempel Sich aufsetzen, als hier eins steht

30,	70,	90,	40,	30,	50,	60,	70,	80,	90,
40	30	80	70	90	70	40	20	60	70

und die verschiedenen Summen auf die vorhin beschriebene Art suchen. Haben Sie Sich diese Fertigkeit erworben, so fangen Sie alsdann beym addiren zweyer Zahlen, davon eine jede nicht mehr als etwa 3 Zifern hat, von der Linken an. Bey dem ersten Exempel zählen Sie z. B. zu 89 gleich 70, so haben Sie 159, und dann dazu die noch übrigen 8, so erhalten 167. Bey dem 2ten zählen Sie zu 839 erst 400, und erhalten 1239, dann dazu 70, wo 1309 kommen, und nun endlich 2, welches zusammen 1311 macht. Auf diese Art findet man die Summe solcher Zahlen leicht im Kopfe und so schnell, daß man so wie ein anderer die

die Zahlen ausgesprochen hat, sogleich die Summe derselben zu sagen im Stande ist. — Gesetzt nun, daß Sie auf diese Art addiren, fangen Sie alsdann die Addition von der Rechten an?

S. Nein, sondern zur Linken.

L. Da haben Sie also gleich ein Beyspiel von dem, was ich Ihnen in unserer ersten Unterredung sagte, nemlich daß Sie bisweilen die Addition von der Linken würden anfangen müssen. Allezeit ist solches freylich nicht rathsam, sondern nur bey solchen Exempeln, welche man im Kopfe auszurechnen im Stande ist; allein da ist es denn doch vortheilhaft, und es ist eine Hauptregel für den, der jederzeit so kurz als möglich rechnen will, daß er sich bey verschiedenen Fällen auch verschiedener Mittel bediene, und nicht den Weg, der in einem Falle der beste ist, auch allenthalben für den besten halte. — Nun addiren Sie einmal 6 El. Tuch und 5 Rthlr.

S. Das kann ich nicht, denn das sind ja ganz verschiedene Dinge.

L. Aber 6 El. Tuch und 5 El. Tuch?

S. Das machen 11 El.

L. Und 6 Rthl. und 5 Rthlr.?

S. Machen zusammen 11 Rthl.

L. Wie müssen also die Dinge beschaffen seyn, die man soll addiren können?

S. Sie müssen von einerley Art seyn.

L. Lassen sich denn wohl 5 Rthlr. 8 Gr. und 3 Rthl. 18 Gr. addiren?

S. O ja, zusammen sinds 9 Rthlr. und 2 Gr.

L. Sind denn Thaler und Groschen Dinge von einerley Art? Mir scheinen sie von verschiedener Art zu seyn.

S. Thaler und Groschen sind zwar nicht einander gleich, aber Dinge von verschiedener Art sind sie deswegen doch nicht, denn beyde sind Geld. Aber etwas ähnliches kann ich von Ellen Tuch und Thalern nicht sagen.

L. Ganz recht. Thaler und Groschen sind nicht der Art, sondern nur der Grösse nach von einander verschieden. Es sind daher Dinge von einerley Art, aber von verschiedenen Graden. Dergleichen Dinge lassen sich in einander verwandeln, und daher auch addiren. — Nun wissen Sie also nicht nur, was man unter der Addition zu verstehen hat, sondern auch, was für Grössen addirt werden können. Vorhin zeigte ich Ihnen, wie Sie Sich in der Addition solcher Zahlen, bey denen man sich keine bestimmte Dinge gedenkt, und welche man unbenannte Zahlen nennt, die Fertigkeit geschwinde zu rechnen zu erwerben suchen sollten; eben dasselbe will ich nun vor allen Dingen auch bey solchen Zahlen thun, bey denen man sich eine gewisse Art von Dingen gedenkt, und welche

man

man benannte Zahlen nennt. Wie machen Sie es also, wenn Sie folgende Exempel addiren?

6 Rthlr.	3 Centn.	9 Rthlr.
5 —	9 —	17 —
9 —	16 —	19 —
12 —	5 —	34 —
25 —	13 —	23 —
7 —	27 —	6 —
8 —	9 —	5 —

S. Ich zähle bey dem ersten Exempel 8, 15, 20, 22, 31, 36, 42, 62, 72; bey dem zweyten 9, 16, 19, 24, 30, 39, 42, 62, 72, 82; und bey dem dritten 5, 11, 14, 18, 27, 34, 43, 63, 93, 103, 113.

L. Also ist die Summe des ersten Exempels?

S. 72.

L. Und des andern?

S. 82.

L. Und des dritten?

S. 113.

L. Haben Sie denn bey diesen Exempeln unbenannte oder benannte Zahlen addirt?

S. Ich habe benannte Zahlen addirt.

L. Und bringen unbenannte in der Summe heraus?

S. Ach ich habe vergessen, die Benennung hinzuzusetzen. Es kommen also in dem ersten Exempel 72 Rthlr., in dem andern 82 Centn., und in dem dritten 113 Rthlr.

L. Ohne die Benennung zu der Summe hinzuzusetzen druckt man dieselbe nicht vollständig aus. Allein sieht man während dem Addiren auf die Benennung?

S. Nein, man addirt nur die Zahlen und setzt zu der Summe derselben die Benennung hinzu.

L. Was also bey der Addition der Zahlen überhaupt gilt, das kann auch bey der Addition benannter Zahlen gebraucht werden; aber ausserdem hat man bey dieser letzten Addition noch auf mehreres nemlich auf die Benennung, Rücksicht zu nehmen. Noch ein Paar Worte von den vorhergehenden Exempeln zu sagen, so hätten Sie auch von der Linken anfangen können. Sie hätten denn bey dem ersten gerechnet, 20, 30, 38, 45, 50, 52, 61, 66, 72 Rthlr.; bey dem zweyten 20, 30, 40, 49, 56, 59, 64, 70, 79, 82 Centn.; und bey dem dritten 20, 50, 60, 70, 75, 81, 84, 88, 97, 104, 113 Rthl. — — Addiren Sie nun folgende Zahlen: 36, 324, 9, 7394, 8578, 973, 8654, 3782, 9550.

S. Diese Zahlen muß ich erst ordentlich unter einander schreiben.

36
324
9
7394
8578
973
8654
3782
9550
―――――
39300

L. Was nennen Sie denn, Zahlen ordentlich unter einander schreiben?

S. So daß sie zur Rechten grade unter einander zu stehen kommen.

L. Das verstehe ich nicht, was Sie damit eigentlich sagen wollen. Schreiben Sie doch einmal folgende Zahlen ordentlich unter einander, Sie sollen sie nachher auch addiren: 325,64. 83,043. 72,3. 576,9. 84,5. 0,7364. 9,37.

S. Diese schreibe ich so.

325,64
83,043
72,3
576,9
84,5
0,7364
9,37
―――――

L. Wie ihre Regel Sie verführt. Im vorhergehenden Falle haben Sie ganz richtig darnach die

die Zahlen geordnet, in diesem aber durchaus falsch. Wenn Sie nur Zahlen von der Ordnung o und von den höhern Ordnungen haben, dann ordnet man die Zahlen zur Addition allerdings richtig, wenn man nur dafür sorgt, daß die lezten Zahlen zur Rechten gerade unter einander stehen, und übrigens Zahl unter Zahl komme; wenn es aber auch Zifern von den niedern Ordnungen giebt, so wäre es ganz falsch, wenn man auf eben die Art verfahren wollte. Ordentlich die Zahlen, welche man addiren soll, unter einander schreiben, heißt daher, dieselben so unter einander setzen, daß die Zahlen von gleicher Ordnung gerade unter einander zu stehen kommen. Bey den Zahlen, wo keine niedern Ordnungen vorkommen, erhält man dies, wenn man die letzten zur Rechten gerade unter einander setzt, und die übrigen dann gehörig schreibt; wenn aber Zifern von niedern Ordnungen da sind, so muß man die Comma, oder die Zifern, bey welchen das Comma steht, vor allen Dingen gerade unter einander schreiben. Nun schreiben Sie das lezte Exempel noch einmal auf.

S. 325,64
83,043
72,3
576,9
84,5
0,7364
9,37
―――――
1152,4894

L. Nun addiren Sie das erste Exempel.

S. 2, 6, 9, 17, 21, 30, 34, 40; 4, 9, 17, 22, 29, 36, 45, 47, 50; 5, 10, 17, 23, 32, 37, 40, 43; 4, 13, 16, 24, 32, 39. (Indem der Schüler so rechnet, schreibt er nach und nach die obige Summe der 39300 auf.

L. Wie rechnen Sie nun aber das zweyte Exempel?

S. Das weiß ich nicht; ich habe dergleichen noch nie gerechnet.

L. Da die Zifern der niedern Ordnungen nach eben dem Gesetze fortgehen, als die Zahlen der höhern Ordnungen, oder jede Zifer irgend einer niedern Ordnung nur den zehnten Theil von dem gilt, was sie in der zunächst vorhergehenden Stelle gegolten haben würde; so hat man bey der Addition die Zahlen der niedern Ordnung auch keine andere, als die gewöhnlichen und Ihnen schon bekannten Regeln zu beobachten. Sie fangen daher von der niedrigsten Ordnung an zu addiren, und zählen, so oft Sie 10 erhalten, dafür 1 zu der folgenden Ordnung. Vergessen müssen Sie dabey nur nicht, das Comma zu setzen, wenn Sie die Summe der Einer niederschreiben. Nun wird es wohl gehen.

S. (Rechnet nun, und schreibt während der Rechnung nach und nach obige Summe der 1152, 4894. auf.)

4; 6, 9; 7, 10, 14, 18; 4, 11, 16, 25, 28, 34; 3, 12, 16, 22, 24, 27, 32; 3, 11, 18, 25, 33, 35; 3, 8, 11.

L. Nun will ich Ihnen verschiedene Exempel aufsetzen, welche Sie für Sich allein machen, und morgen mir ausgerechnet mitbringen können. Lassen Sie es aber bey den Additionsexempeln, die ich Ihnen aufgebe, nicht bewenden, sondern setzen Sie Sich, da es leicht ist, wenn Sie Zeit haben, selbst dergleichen auf, und üben Sie Sich dabey im Addiren, nicht nur um richtig, sondern auch, um sehr schnell und fertig addiren zu lernen. Auch diese Fertigkeit ist für einen Rechner von sehr grosser Wichtigkeit, und Sie müssen daher auch in der Folge von dem gegenwärtigen Rathe Gebrauch zu machen, oder ihn zu befolgen suchen. Hier sind nun die Exempel. Das erste: 3684. 256. 34. 9543. 7826. 3592. 48679. 2358. 2364. 3859. 78. 365943; das andere: 63,2. 793. 84,593. 7,385. 0,00642. 3694. 7900, 5684, 3. 8,764, 29, 36, 450,007; und das dritte: 6439. 7,86. 56,39. 8,7932. 564. 86542. 93843. 7,05. 896,432. 597,354. — — Wie würden Sie nun folgendes Exempel aufsetzen und addiren: 36a, 72b, 35a, 79c, 30d, 54a, 65b, 39d, 74a, 73d, 8c?

S. Das sind ja Buchstaben; wie man da rechnet, weiß ich nicht.

L. Was bedeuten denn die Buchstaben in der Arithmetik?

S. Gewisse Zahlen oder Grössen, die man allgemein oder unbestimmt ausdrücken will.

L.

L. Aber einerley Buchstaben bedeuten denn doch immer einerley, und verschiedene Buchstaben doch verschiedene Grössen?

S. Ja.

L. Wenn Sie also das gegebene Exempel zur Addition aufsetzen wollten, wie müßten Sie solches nach der vorhin angeführten Regel thun?

S. Ich müßte die Zahlen, bey welchen einerley Buchstaben stünden, unter einander setzen.

L. Die Buchstaben, welche in dem gegebenen Exempel vorkommen, können Sie fürs erste als die Benennungen bey den benannten Zahlen betrachten, und dadurch sich das ganze nöthige Verfahren leicht machen.

S. Ich muß also so aufschreiben:

$36a$,	$72b$,	$79c$,	$30d$
$35a$,	$65b$,	$8c$,	$39d$
$54a$,			$37d$
$74a$,			

L. Ganz recht, nur wird es gut seyn, wenn Sie, um anzuzeigen, daß man alle angegebene und hier von Ihnen geordnete Grössen addiren solle, statt der Comma das Zeichen + setzen. Wie wird darnach nun das Exempel stehen müssen?

S. So

$$\begin{array}{llll} 36a + & 72b + & 79c + & 30d \\ 35a + & 65b + & 8c + & 39d \\ 54a & & & 73d \\ 74a & & & \\ \hline \end{array}$$

L. Wie viel Grössen haben Sie nun, die a heissen?

S. 199a.

L. Und wie viel b?

S. 137b.

L. Wie viel c?

S. 87c.

L. Und endlich wie viel d?

S. 142d.

L. Sie sehen, daß die Addition hier nicht schwerer ist, als bey den benannten Zahlen, und überhaupt soll Ihnen die Buchstabenrechnung schon leicht genug werden. Rechnen Sie nun auch folgendes Exempel für Sich aus: 76a, 89d, 74c, 83b, 69c, 134a, 86d, 95a, 6b, 342c, 65d, 79a, 864b, 186c, 9d. Noch ist verschiedenes von der Addition übrig, denn die einfachen Rechnungsarten müssen wir so ausführlich als möglich durchrechnen, um uns die zusammengesetzten Rechnungsarten leicht zu machen; allein für heute wollen wir es hiebey bewenden lassen, damit es Ihnen nicht zu viel werde.

Sechstes Gespräch.

L. Haben Sie die Exempel, die ich Ihnen gestern mitgegeben habe, ausgerechnet?

S. Hier sind sie. (Der Schüler übergiebt folgende Exempel aufgeschrieben.)

3684	63,2
256	793,
34	84,593
9543	7,385
7826	0,00642
3592	3694,
48679	7900,
2358	5684,3
2364	8,764
3859	29,36
78	450,007
365943	18714,61542
448216	

6439,
7,86
56,39
8,7932
564,
86542,
93843,
7,05
896,432
597,354
―――――
188961,8792

$76a + 83b + 74c + 89d$
$134a + 6b + 69c + 86d$
$95a + 864b + 342c + 65d$
$79a + + 186c + 9d$
―――――
$384a + 953b + 671c + 249d$

L. Sind diese Exempel durchaus ohne Fehler?

S. Ich habe mir Mühe gegeben, sie ohne Fehler auszurechnen, allein dafür kann ich nicht stehen, daß ich gar keinen Fehler sollte gemacht haben.

L. Aber auch das müssen Sie können. Denn jetzt haben Sie zwar an mir jemanden, der Ihnen sagen kann, ob Sie gefehlt haben oder nicht; allein künftig, wenn Sie von Ihren Rechnen im Leben oder Geschäften Gebrauch machen werden, müssen Sie Sich auf Sich selbst verlassen können, und daher von Anfang an suchen, immer Ihrer Sache gewiß zu seyn. Ich habe Ihnen auch für die Addition neulich schon ein Mittel dazu vorgeschlagen.

S. Das doch, daß ich erst von unten hinauf, und dann von oben herunter rechnen, und beyde

beyde Summen mit einander vergleichen sollte? Das habe ich gethan, und wenn ich in beyden Fällen einerley herausbrachte, so schrieb ich die Summe hin; wenn ich aber auf verschiedene Summen kam, so addirte ich von neuem so wohl von unten hinauf als von oben herunter, bis ich in beyden Fällen einerley Summe erhielt.

L. Dann will ich auch zum voraus behaupten, daß diese Exempel richtig gerechnet sind, und nun sie übersehen. (Der Lehrer sieht nun die übergebenen Exempel prüfend durch). Sie sind ganz ohne Fehler gerechnet. — Nun können wir wohl zur Subtraction fortgehen?

S. Ja, denn wir haben ja nun schon alle Arten von Zahlen, benannte und unbenannte, betrachtet, und selbst die Buchstaben gehabt.

L. Haben wir auch schon Producte, Dignitäten und Wurzeln addirt?

S. Daß ich doch wieder nicht daran gedacht habe; in der Numeration dachte ich auch schon, wir wären fertig, als Sie von den ganzen Zahlen nur mit mir gesprochen hatten, weil ich sonst nur mit diesen mich beschäftiget habe; an die übrigen Arten der Zahlen dachte ich da auch nicht, ohnerachtet Sie dieselben mir doch schon erklärt hatten. Ins künftige will ich schon daran denken.

L. Und dann ist es auch nicht genug, daß Sie addiren können; Sie müssen Sich auch über alles das, was dabey zu thun ist, deutlich zu erklären,

klären, und den Grund davon anzugeben wissen. Sollten Sie das schon in allen Fällen im Stande seyn?

S. Ich glaube nicht.

L. Also noch einmal die Frage: Was heißt addiren?

S. Verschiedene Grössen oder Zahlen in Eine verwandeln, welche jenen zusammen genommen gleich ist.

L. Kann man jede Anzahl Grössen oder Zahlen, sie mögen nun so verschieden seyn, als sie wollen, addiren oder in Eine ihnen allen gleiche Grösse oder Zahl verwandeln?

S. Nein, sondern nur solche, die von einerley Art sind.

L. Brauchen sie aber deswegen auch zu einerley Graden zu gehören?

S. Nein, es ist genug, wenn sie nur von einerley Art sind, in Ansehung des Grades können sie verschieden seyn.

L. Woran erkennen Sie wohl, daß Grössen oder Zahlen von einerley Art sind? Bekannt ist Ihnen ein Kennzeichen davon, das schliesse ich daraus, weil Sie neulich sagten, Thaler und Groschen wären Grössen von einerley Art, indem beyde Geld wären; allein ich weiß nicht, ob Sie auch schon im Stande seyn werden, dies Kennzeichen deutlich zu beschreiben.

S.

S. Ich nenne die Grössen und Zahlen Grössen und Zahlen von einerley Art, die ich unter Eine Benennung fassen kann.

L. Sind also Centner, Pfund, Loth und Quentchen Grössen von einer Art oder nicht?

S. Sie sind es, denn alle diese Dinge kann ich mit dem Namen Gewichte benennen.

L. Wenn gehören aber Zahlen oder Grössen zu verschiedenen Graden?

S. Wenn Sie in Ansehung der Grösse verschieden sind. So sind z. E. Thaler und Groschen Grössen von verschiedenen Graden, weil ein Thaler mehr ist als ein Groschen, und Centner, Pfund, Loth und Quentchen ebenfalls, weil ein Loth mehr als ein Quentchen, ein Pfund mehr als ein Loth, und ein Centner mehr als ein Pfund ist.

L. Dies vorausgesetzt, so entsteht nun die Frage, wie viel Fälle bey der Addition zu betrachten sind? Wie viel meinen Sie?

S. Zuerst zwey; denn die Grössen oder Zahlen, welche addirt werden sollen, gehören entweder zu Einem Grade, oder zu verschiedenen.

L. Was findet für ein Fall statt, wenn Zahlen, die aus Zifern verschiedener Ordnungen bestehen, zu addiren sind?

S. (Nach einigem Nachdenken). Der zweyte; denn Zahlen, die zu verschiedenen Ordnungen gehören, sind auch Zahlen von verschiedenen Graden.

L.

L. Grössen oder Zahlen von einerley Grade zu addiren erfordert nun weiter nichts als daß man sie zusammen zählt. Sind aber die Grössen oder Zahlen, welche man addiren soll, zu verschiedenen Graden gehörig und ihre Anzahl überdem so groß, daß man sie nicht im Kopfe addiren kann, (wie man, wenn dies möglich ist, sich zu verhalten habe, davon ist bereits von mir das nöthige gesagt) so ist schon mehr dabey zu beobachten. Dann schreibt man vor allen Dingen die zu addirenden Grössen oder Zahlen unter einander, aber wie?

S. So daß die, welche zu einerley Grade gehören, in einer Reihe gerade unter einander stehen.

L. Und wie verfährt man alsdann bey der Addition selbst?

S. Man fängt von den Grössen oder Zahlen des niedrigsten Grades an, und geht nach und nach zu den Grössen oder Zahlen der höhern Grade fort. Oft findet sich dabey, daß die Summen, welche die Grössen oder Zahlen eines niedrigern Grades geben, eine oder mehrere Grössen von dem zunächst folgenden höhern Grade ausmachen, und dann zählt man so viel zu den Grössen oder Zahlen dieses höhern Grades, und schreibt das übrige nur unter die addirte Reihe. Wenn man z. E. 38 Einer erhielte, so enthalten diese 3 Zehner und 8 Einer, und man schreibt alsdann nur 8 unter die Einer, und zählt die 3 zu den Zehnern. Eben so

zählt

zählt man, wenn man 36 Gr. erhält, welche 1 Rthlr. und ausserdem 12 Gr. enthalten, 1 zu den folgenden Thalern, und setzt unter die Groschen 12.

L. Aus dem, was man bey der Addition zu thun hat, können Sie nun leicht herleiten, warum man zuvor die zu addirenden Grössen oder Zahlen auf die vorhin erwähnte Art schreibt. Da man immer die Grössen und Zahlen, die zu einerley Grade gehören, zusammen zählt, so ist es gut, daß dieselben gerade über einander stehen. Denn wäre dies nicht, so würde man sich leicht verirren. Gesetzt z. B. Sie sollten folgendes Exempel addiren:

3,654
685,3
90,
79356,
87,2;

wie würden Sie da, ohne Sich zu irren im Stande seyn, die Zahlen, welche zu einerley Ordnung gehören, und zwar schnell hinter einander, zu übersehen? — Nunmehr können Sie alle Regeln der Addition, und es ist nichts weiter übrig, als von Ihrer Seite eine fleissige Uebung dieser Regeln, und von meiner Seite, daß ich Sie noch lehre, wenn Producte, Dignitäten und Wurzeln Grössen von einerley Art sind. Ueberhaupt ist bey der Addition das schwerste dies, daß man jedesmal wisse, ob die zu addirenden Grössen oder Zahlen von ei-

nerley Art sind oder nicht, und wenn das erste statt findet, und die gegebenen Grössen und Zahlen zu verschiedenen Graden gehören, daß man den Unterschied dieser Grade kenne. — Zuerst also von den Producten. Könnte man wohl 6 mal 24 und 7 mal 24 addiren?

S. O ja; 6 mal 24 und 7 mal 24 macht 13 mal 24.

L. Und 6a und 7a, wie viel geben sie?

S. 13a.

L. 6a und 7a sind eben so gut Producte als 6x24 und 7x24. Denn a kann eine jede Zahl und also auch 24 bedeuten. Dies wären also Producte von einerley Art, indem man sie auch leicht unter eine Benennung fassen kann. Denn bey den Zahlenproducten haben wir verschiedene Male 24, und bey den Buchstabenproducten Mengen von a. Wäre aber 6x18 und 7x13, oder 6a und 9b auch Producte von einerley Art?

S. Nein, denn diese kann ich nicht unter Eine Benennung bringen.

L. Und warum nicht?

S. Weil sie gar nichts mit einander gemein haben.

L. Das wäre also erforderlich, wenn Producte Grössen von Einer Art seyn sollen, daß sie etwas mit einander gemein hätten. Aber dies etwas, wie könnten Sie es wohl deutlicher benennen?

S.

S. Factoren.

L. Müssen Producte, um gleichartig zu seyn, alle Factoren mit einander gemein haben?

S. (Nachdem er die vorhergehenden Beyspiele aufmerksam betrachtet hat.) Nein, ein Factor kann verschieden seyn.

L. Wie sind folgende Producte beschaffen.

1. 6x24x7, 9x24x7, 8x24x7.
2. 3ab, 5ab, 19ab, 14ab
3. 7x8x9, 7x10x113, 8x14x5.
4. 6abc, 7adf, 9cdg
5. 4abc, 17abc, 19abc, 5abc.

S. Die Producte bey 1. 2 und 5 sind gleichartig, die übrigen aber ungleichartig.

L. Also könnte man doch auch die Producte bey 1 2 und 5 addiren?

S. O ja, ich sage hier

1. $6 \times 24 \times 7 + 9 \times 24 \times 7 + 8 \times 24 \times 7 = 23 \times 24 \times 7$
2. $3ab + 5ab + 19ab + 14ab = 41ab$
3. $4abc + 17abc + 19abc + 5abc = 45abc.$

L. Wie sind denn folgende Producte beschaffen?

ax, bx, cx, dx? und by, cy, fy?

S. Sie sind auch gleichartig; denn die erstern haben den Factor x, und die andern den Factor y gemein.

L. Also können Sie diese doch auch addiren?

S. Wenn ich a, b, c und d, und dann b, c und f addiren könnte, so wie solches vorhin mit den

Zahlen 6, 9 und 8, desgleichen 3, 5, 19 und 24 u. s. w. geschehen könnte. Allein das geht nicht, denn a, b, c und d, so wie auch b, c und f sind verschiedene Grössen oder Zahlen.

L. Könnten aber nicht a, b, c und d, desgleichen b, c und f Zahlen einer Art bedeuten, und dann wäre doch an und für sich die Addition möglich?

S. Dann allerdings; allein ich weiß doch nicht, ob das ist oder nicht.

L. Wirklich addiren können Sie daher auch hier nicht, aber doch durch Zwischensetzung des Zeichens + anzeigen, daß a, b, c und d, desgleichen b, c und f als Zahlen oder Grössen betrachtet werden sollen, die zu addiren sind, sobald es möglich ist?

S. O ja.

L. Thun Sie dies.

S. Dann ist

$ax + bx + cx + dx = a + b + c + dx$ und

$by + cy + fy = b + c + fy$.

L. Das soll doch so viel heissen, daß erste a und b und c und d addirt, und ihre Summe als ein Factor und x als der andre Factor eines Products angesehen werden sollen?

S. Ja.

L. Dann müssen Sie a + b + c + d in eine Parenthese einschliessen. Und wie werden Sie nun schreiben?

S. $ax+bx+cx+dx=(a+b+c+d)x$
$by+cy+fy=(b+c+f)y$.

L. Wir sind hier auf einen Fall gestossen, der Ihnen durch dieses eine Exempel noch nicht deutlich geworden seyn wird. Es ist nemlich der, daß Grössen zu addiren gegeben sind, von denen wir noch nicht mit Gewisheit wissen, ob sie werden addirt werden können, und wo uns also nichts weiter übrig bleibt, als anzuzeigen, daß addirt werden solle, wenn es möglich ist. Dergleichen Fälle haben Sie wohl sonst noch nicht gehabt?

S. Nein.

L. Und doch kommen sie im Leben nicht selten vor.

S. Was hilft das aber, daß man blos anzeigt, daß verschiedene Grössen addirt werden sollen, wenn man sie nicht wirklich addirt, oder wohl gar nicht einmal addiren kann?

L. Wozu es hilft oder nützlich ist, werden Ihnen einige Beyspiele am besten zeigen können. Lassen Sie uns also einmal ausrechnen, wie viel das, was Sie an haben, wenn Sie angezogen sind, Ihren Eltern kostet.

S. Da werden vielerley Dinge in Rechnung gebracht werden müssen; allein wenn wir nur auch von jedem den Preis wissen werden, mir ist er nicht von allen bekannt.

L. Allenfalls können wir auch das, was eigentlich meine Absicht ist, ohne die Rechnung ganz

genau anzustellen, erreichen. Vorausgesetzt, daß Sie den Preis von einem jeden der Stücke, welche Sie an sich tragen, nicht wüßten, und die gedachte Rechnung machen wollten, würden Sie Sich denn nicht lieber zuvor alle diese Stücke aufschreiben, und Sich denn erst nach den Ihnen unbekannten Preisen erkundigen und selbige bey die verzeichneten Sachen setzen?

S. Ich würde es so machen, denn sonst könnte ich nicht gut alles übersehen, und nicht beurtheilen, was ich dem Preise nach kennte und nicht kennte.

L. Sie können dazu setzen, daß Sie auch sonst Gefahr laufen würden, eins oder das andere ganz aus der Acht zu lassen, wenigstens würde dies bey der Schätzung sehr vieler Dinge, wie z. E. wenn alles, was jemand besitzt, seinem Werthe nach bestimmt werden soll, oft der Fall seyn; und je mehr Dinge da sind, desto unbequemer lassen sie sich in Eine Summe nach gehöriger Verwandlung vereinigen, wenn man sich nicht zuvor die Dinge selbst gemerkt hat, und dann erst ihre Verwandlung vernimmt, und nun endlich zu ihrer Vereinigung schreitet. So macht man es daher auch bey solchen Fällen im gemeinen Leben stets, und wir thun daher in der Buchstabenrechnung gar nichts ungewöhnliches, wenn wir darin oft nur anzeigen, daß Grössen addirt werden sollen, so lange wie sie noch nicht nach der Kenntniß, welche wir

von ihnen haben, addiren können. In der Folge werden Sie aber eigentlich erst den wahren Nutzen kennen lernen, den oft das blosse Anzeigen dessen, was man thun soll, hat, und der so groß ist, daß man selbst da, wo man sogleich rechnen könnte, doch oft diese Anzeige sich zuvor macht. — Nun können wir wohl zu den Dignitäten fortgehen, und auch dabey die Frage untersuchen, wenn dieselben von einerley Art sind, und sie also addirt werden können? Was meinen Sie dazu?

S. Aber Sie haben ja noch nicht von den Divisorproducten mit mir gesprochen, sondern die Exempel, die wir gehabt haben, enthielten lauter Multiplicatorproducte.

L. Und so hätten wir auch wohl noch die Addition der Divisoren überhaupt zu betrachten, denn davon habe ich ja auch noch nicht mit Ihnen geredet?

S. Die hätten wir bald ganz und gar vergessen.

L. Das nun wohl nicht; wir wollen jetzt selbst die Divisorproducte noch bey Seite setzen, und zu den Dignitäten fortgehen. Ob ich daran recht thue oder nicht, darüber sollen Sie hinterher selbst urtheilen. Wenn meinen Sie also, daß Dignitäten, Dignitäten von einerley Art sind?

S. (Nach einigem Nachdenken). Ich kenne die Dignitäten noch zu wenig, als daß ich auf diese Frage sollte antworten können.

L. Was verstehen Sie unter einer Dignität?

S. Ein Product aus gleichen Factoren.

L. Ist es genug um eine Dignität zu kennen, daß man nur eine ihrer gleichen Factoren weiß?

S. Nein, sondern man muß auch die Anzahl der gleichen Factoren der Dignität wissen.

L. Wenn Sie Sich noch erinnern, wie man einen jeden der gleichen Factoren eine Dignität nennt, und auch, wie die Zahl heißt, welche anzeigt, aus wie viel gleichen Factoren eine Dignität besteht, so werden Sie ganz so, wie ichs wünsche, die Frage beantworten können, auf was für Stücke man zu sehen habe, um eine Dignität genau zu kennen.

S. Auf zwey, nemlich auf die Wurzel und auf den Exponenten.

L. Vorausgesetzt, daß man weiß, ob von einer Multiplicator- oder Divisordignität die Rede sey, so ist diese Antwort richtig. Gesetzt nun, daß man lauter Multiplicatordignitäten von einerley Wurzel und einerley Exponenten hat, gehören dieselben zu einer oder zu verschiedenen Arten?

S. Zu einer Art. Denn man benennt ja die Dignitäten nach der Wurzel und den Exponenten, und wenn also diese beyden Stücke bey Dignitäten gleich sind, so kann man sie unter Eine Benennung fassen.

L. Also wären $6a^3$ und $7a^3$ und $12a^3$ Grössen von Einer oder verschiedener Art?

S. Es sind Grössen von einer Art.

L. Also können Sie auch addirt werden. Wie viel a^3 machen also $6a^3$, $7a^3$ und $12a^3$?

S. $25a^3$.

L. Versuchen Sie also, folgende Dignitäten zu addiren: $3a^3$, $7b^4$, $9c^2$, $8a^3$, $7a^3$, $9c^2$, $7b^4$, $5b^4$, $13c^2$.

S. Das muß ich zuvor ordentlich aufschreiben.

$$\begin{array}{l} 3a^3 + 7b^4 + 9c^2 \\ 8a^3 + 7b^4 + 9c^2 \\ 7a^3 + 5b^4 + 13c^2, \text{ und das} \\ \hline \end{array}$$

macht $18a^3 + 19b^4 + 31c^2$.

L. Nun müssen wir auch wissen, wenn wir mit Gewißheit sagen können, daß Wurzeln zu Einer Art gehören?

S. Dann gewiß, wenn Sie Wurzeln einer und derselben Zahl sind, und einerley Namen haben, ich will sagen, alle entweder zweyte oder dritte oder vierte u. s. w. Wurzeln sind.

L. Gut. Also $3\sqrt[3]{a}$, $9\sqrt[3]{a}$, $12\sqrt[3]{a}$?

S. Sind Grössen Einer Art.

L. Und $5\sqrt[2]{a}$, $7\sqrt[3]{b}$, $9\sqrt[2]{b}$.

S. Sind Grössen von verschiedener Art.

L. Addiren Sie also folgendes: $3\sqrt[5]{a}$, $9\sqrt{b}$, $7\sqrt[5]{a}$, $14\sqrt{c}$, $17\sqrt{b}$, $8\sqrt[5]{a}$, $3\sqrt{c}$, $14\sqrt{b}$.

S. Auch hier muß ich zuvor aufschreiben.

$$\begin{array}{l} 3\sqrt[5]{a} + 9\sqrt{b} + 14\sqrt{c} \\ 7\sqrt[5]{a} + 17\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \\ \underline{8\sqrt[5]{a} + 14\sqrt{b} \qquad\qquad} \\ 18\sqrt[5]{a} + 40\sqrt{b} + 17\sqrt{c}. \end{array}$$

und das macht

L. Wie könnten Sie wohl das ganze Exempel auf eine bequemere Art schreiben?

S. So

$$\begin{array}{l} 3a^{\frac{1}{5}} + 9b^{\frac{1}{2}} + 14c^{\frac{1}{2}} \\ 7a^{\frac{1}{5}} + 17b^{\frac{1}{2}} + 3c^{\frac{1}{2}} \\ 8a^{\frac{1}{5}} + 14b^{\frac{1}{2}} \\ \hline 18a^{\frac{1}{5}} + 40b^{\frac{1}{2}} + 17c^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

L. Hiebey ist also nichts schweres. Wir können also weiter fortgehen, und nun wollen wir die Divisoren betrachten, und zwar nicht nur die Divisoren überhaupt, sondern auch die Divisorproducte und die Divisordignitäten. Sollten wohl $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ Divisoren von einer Art seyn?

S. Nein, denn man kann sie nicht unter Einer Benennung bringen.

L. Aber $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$?

S.

S. Ja, das sind lauter Sechstheile.

L. Wie viel erhalten Sie also davon, wenn Sie die angeführten addiren?

S. Drey.

L. Wie schreiben Sie solche?

S. Das weiß ich nicht.

L. Sie können solches entweder auf die Art thun, daß Sie die Zahl 3 und den Divisor $\frac{1}{6}$ hinschreiben und das Zeichen x dazwischen setzen, oder auch so, daß Sie die 3 und 6 über einander schreiben und dazwischen einen Strich machen, ich meine so: $3 x \frac{1}{6}$ oder $\frac{3}{6}$. Das scheint aber eine andere Art von Zahlen zu seyn, als wir bisher gehabt haben. Man hat auch denselben einen besondern Namen gegeben, und nennt sie Brüche. Sie sind nichts anders als zusammen gesetzte Zahlen, deren Factoren aber ein Multiplicator und Divisor ist. Wenn Sie daher bey einer Grösse stehen, z. B. $3 x \frac{1}{6}$ Rthlr. oder $\frac{3}{6}$ Rthlr., so zeigen sie an, daß man dieselbe erst in eine gewisse Anzahl von Theilen theilen, und einen dieser Theile verschiedene Male nehmen solle. Wenn die Brüche so geschrieben werden, als $\frac{3}{6}$; so gebraucht man dazu nur zwey Zifern, davon die eine anzeigt in wie viel Theile getheilt werden solle, und die andere, wie oft man einen der erhaltenen Theile sich gedenken solle. Das erstere thut hier die 6, und das andere die 3. Da man nach der Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile getheilt werden soll, den Bruch benennt, so

heißt dieselbe auch der Nenner, und die andere der Zähler. Hieraus werden Sie nun leicht bestimmen können, wenn Brüche von einerley Art sind, und man sie also addiren könne?

S. Brüche sind von Einer Art, wenn ihre Nenner gleich sind; denn alsdann kann man sie unter einerley Benennung fassen.

L. Addiren Sie also $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$.

S. Dies sind zusammen $\frac{24}{8}$.

L. Aber $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$?

S. Das sind Brüche von verschiedener Art, die können nicht addirt werden.

L. An und für sich wenigstens nicht. In der Folge aber werden wir die Art und Weise lernen, Brüche von verschiedenen Nennern in gleiche Brüche von einerley Nennern zu verwandeln, und dann können wir auch dergleichen Brüche als $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$ nach dieser Verwandlung addiren. — Wie man einen Bruch allgemein ausdrucken könne, sind Sie doch ohnstreitig im Stande anzugeben?

S. Auf eine doppelte Art, entweder $a \times \frac{1}{b}$ oder $\frac{a}{b}$.

L. Und $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{b}$, $\frac{e}{b}$, sind daher mehrere Brüche, von einer oder verschiedener Art?

S. Von einer Art, denn ihre Nenner sind gleich.

L. Und ihre Summe ist daher?

S. $\frac{a+c+d+e}{b}$.

L. Was sind dagegen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ für Brüche?

S. Brüche von verschiedener Art, und diese können nicht addirt werden.

L. Wenn man sie aber in gleiche Brüche von einerley Nenner verwandeln kann?

S. Ja dann ist es, aber erst nach dieser Verwandlung, ungleich.

L. So lange kann man also anzeigen, daß sie addirt werden sollen. Wie würden Sie dies thun?

S. So $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$.

L. Wenn Sie nun die Brüche mit den benannten Zahlen vergleichen, so werden Sie darunter eine grosse Uebereinstimmung finden. Was die Benennung bey den benannten Zahlen ist, das ist bey den Brüchen der Nenner, und was bey den benannten Zahlen die Zahl ist, das ist hier der Zähler. Auch kann man die Brüche sehr leicht in benannte Zahlen dadurch verwandeln, daß man ihre Nenner durch Worte oder andere Zeichen als Zahlen ausdrückt. Z. B. $\frac{3}{4}$ könnte man auch 3 Viertheile schreiben, und wenn a die Bedeutung $\frac{1}{4}$ hätte, so wären 3a auch so viel als $\frac{3}{4}$. Diese Vergleichung und Veränderung der Art, Brüche zu schreiben, kann das Verfahren mit Brüchen erleichtern. — Nun werden wir auch nicht nöthig haben,

ben, uns bey den Divisorproducten lange aufzuhalten. Sie sind von gleicher Art, wenn sie sich in ihren Factoren nicht von einander unterscheiden. So sind z. B. $\frac{1}{3 \times 4}$ und $\frac{1}{3 \times 4}$ Divisorproducte von einerley Art, $\frac{1}{3 \times 4}$ und $\frac{1}{3 \times 5}$ aber oder $\frac{1}{3 \times 4}$ und $\frac{1}{5 \times 9}$ Divisorproducte von verschiedener Art. Die Addition verschiedener Divisorproducte von einerley Art führt aber auch wieder auf Brüche, und zwar auf solche, deren Nenner Factoren sind, und welche man also auch wieder auf zweyerley Art schreiben kann. $6 \times \frac{1}{4 \times 5}$ ist z. B. mit $\frac{6}{4 \times 5}$, und $a \times \frac{1}{c \times d}$ mit $\frac{a}{c \times d}$ oder $\frac{a}{cd}$ völlig einerley. Auch diese Brüche können nicht wirklich addirt werden, wenn nicht ihre Nenner gleich sind, denn nur alsdenn sind sie von einerley Art; ist dies nicht, so muß man sie entweder zuvor in Brüche von gleichen Nennern verwandeln, oder nur anzeigen, daß sie addirt werden sollen. Was nun endlich die Divisordignitäten betrifft, so ist davon gar nicht nöthig besonders zu reden. Denn entweder sind sie wie Divisoren ausgedruckt, und dann gilt das bisherige davon, oder sie sind mit negativen Exponenten geschrieben, und dann verfährt man nach den Regeln, die wir bey der Betrachtung der Dignitäten in der Addition gehabt haben. Bey Exempeln will ich mich jetzt nicht aufhalten, indem dergleichen

in

in der Folge vorkommen werden, wo das gesagte denn auch noch viel deutlicher werden wird, und daher ist nun in der Addition uns nichts weiter übrig als noch eine kurze Betrachtung der benannten Zahlen, und zwar in Ansehung der Frage, ob sie von einerley Art oder von verschiedener Art sind.

S. Da ist dies leicht zu beurtheilen, denn da darf man nur auf die Benennung sehen. Ist die Benennung gleich, so sind sie von Einer Art, wo nicht, so sind sie von verschiedener Art.

L. Die Addition der benannten Zahlen hat indeß gleichwohl ihre Schwierigkeiten. Denn einmal sind durch diese Zahlen nicht allezeit die bezeichnete Grössen, wenn die Benennung gleich ist, durchaus von einerley Art. Thaler in Golde, und Thaler in Courant oder Scheidemünze sind schon unterschieden, und eben so sind auch nicht die Maasse und Gewichte verschiedene Oerter gleich, wenn sie gleich einerley Namen führen. Ausserdem hat man bey den benannten Zahlen gewöhnlicher Weise Grössen von verschiedenen Graden, und da ist es nothwendig, daß man wisse, wie viel von jedem niedrigern Grade auf den zunächst folgenden gehen. Dies jedesmal zu wissen, ist keine leichte Sache. Wer viel mit der Berechnung des Geldes und zwar für verschiedene Oerter zu thun hat, muß die verschiedenen Arten der üblichen Münzen alle kennen, und eben so der die verschiedenen Arten der Maasse

und Gewichte, wer damit sich beschäftigen muß. Diese Kenntniß muß man daher, weil man sich dieselbe nicht durch blosses Nachdenken verschaffen kann, wo man dazu Gelegenheit hat, aus Büchern und aus dem Umgange mit solchen Personen, die es wissen, zu verschaffen suchen, und ich rathe auch Ihnen solches zu thun. Gelegentlich werde auch ich Ihnen dazu behülflich seyn. So viel für jetzt von der Addition.

Siebentes Gespräch.

L. Da ich in meiner letzten Unterredung mit Ihnen die Erklärung der Regeln der Addition fürs erste geschlossen habe, so werde ich nun heute mit Ihnen zu reden haben?

S. Von der Subtraction.

L. Sie können ja wohl schon subtrahiren.

S. Ich will lieber nicht sagen, daß ich es kann, denn ich glaubte auch, die Addition schon durchaus inne zu haben, und nun habe ich doch noch vieles mir vorher ganz unbekannte lernen müssen. Mit der Subtraction wird es mir wohl eben so gehen.

L. Sehr gut, daß Sie von dem, was da gewesen ist, auf das, was folgen wird, schliessen.

So lernt man Klugheit. Auch glaubten Sie in der Addition fertig zu seyn, da Sie nur eine Art der Zahlen betrachtet hatten; nicht wahr?

S. Bey der Subtraction soll es mir nicht wieder so gehen, denn nun werde ich nicht eher sagen, daß wir damit fertig sind, als bis Sie mit mir von der Subtraction aller der Arten von Zahlen gesprochen haben, die ich kenne, und die wir auch bey der Addition betrachtet haben.

L. Um also nach dem Wege, den wir in der *Addition* gegangen sind, den Weg, welchen wir in der Subtraction zu nehmen haben, zum voraus *uns* gleichsam zu verzeichnen, so wird das *erste* seyn?

S. Die Frage: Was heißt subtrahiren?

L. Dann?

S. Die Frage: Wie müssen die Zahlen beschaffen seyn, die von einander subtrahirt werden sollen?

L. Ferner.

S. Nun kommen erst die Fälle, bey welchen man die Subtraction im Kopfe verrichten kann.

L. Dann?

S. Dann die Exempel, welche man zuvor aufschreiben muß, weil sie zu schwer sind, um im Kopfe übersehen zu werden.

L. Und hier gehen wir nun die verschiedenen Arten der Zahlen durch; also erstlich

S. Zuerst nehmen wir dann Exempel mit den gewöhnlichen Zahlen.

L. Benannten doch eben so wohl als unbenannten?

S. Ja, aber doch bloß die Multiplicatoren.

L. Ferner?

S. Nun folgen die Multiplicatorproducte.

L. Ferner?

S. Die Dignitäten.

L. Nun?

S. Die Wurzeln.

L. Endlich?

S. Die verschiedenen Arten der Divisoren und die Brüche.

L. Sie haben Sich den gegangenen Weg recht gut gemerkt, und nun will ich Ihnen auch sagen, warum ich von den Divisoren und den Brüchen erst am Ende gesprochen habe. Sie wissen, daß wir uns bey den Brüchen nicht lange aufgehalten haben. So kurz hätte ich nicht seyn können, wenn ich sogleich jede Art der Divisoren nach den ihnen ähnlichen Multiplicatoren hätte betrachten wollen. Ausserdem setzt die Kenntniß der Brüche doch schon die Kenntniß der Producte voraus, indem sie nichts anders als Producte sind, und daher war die beobachtete Ordnung die natürlichste. Aus diesen Gründen wollen wir daher dieselbe Ordnung bey der Subtraction beobachten, und nun zu der Frage: Was heißt subtrahiren?

S.

S. Abziehen.

L. So ist das Wort subtrahiren übersetzt, aber nicht erklärt. Subtrahiren Sie 5 von 8; was bleibt?

S. 3.

L. Und 12 Rthlr. von 20 Rthlr. was bleibt?

S. 8 Rthl.

L. Subtrahiren Sie einmal 13.

S. Wovon?

L. Müssen Sie das auch wissen?

S. Wie wäre ich sonst im Stande zu subtrahiren?

L. Wie viel Grössen oder Zahlen müssen Ihnen also gegeben seyn, wenn Sie subtrahiren sollen?

S. Zwey, eine, welche ich abziehen soll, und eine, wovon diese abgezogen werden muß.

L. Jene nennt man Subtrahendus, diese Minuendus. Lassen Sie beyde, wenn Sie subtrahiren, unverändert?

S. Nein, ich mache daraus eine dritte.

L. Und wie ist diese beschaffen?

S. Sie zeigt an, um wie viel der Subtrahendus von dem Minuendus unterschieden ist.

L. So oft Sie also subtrahiren sollen, sind Ihnen zwey Zahlen oder Grössen gegeben, und Sie suchen oder finden durch die Subtraction den Unterschied derselben. Was verstehen Sie denn aber unter dem Unterschiede zweyer Zahlen?

S. Das, was ich zu der einen hinzusetzen oder wegnehnehmen muß, damit sie der andern gleich werde. So ist z. B. der Unterschied zwischen 5 und 8, 3, weil, wenn ich 3 zu 5 setze, 8, und wenn ich 3 von 8 wegnehme, 5 herauskommt.

L. Also heißt auch subtrahiren wohl, aus zwey gegebenen Grössen oder Zahlen diejenige finden, welche man zu der einen zusetzen oder von derselben wegnehmen muß, damit sie der andern gleich werde?

S. Ja, denn das ist dasselbe.

L. Wie findet man denn nun den Unterschied zweyer Grössen oder Zahlen?

S. Wenn man so viel von der einen wegnimmt, als die andere beträgt.

L. Und das geht doch bey jeden zwey gegebenen Grössen oder Zahlen an?

S. Nein, denn die, welche man von einer andern wegnehmen soll, muß kleiner als diese seyn, und ausserdem müssen beyde von einer Art seyn, sonst läßt sich die Subtraction ebenfalls nicht verrichten.

L. Wenn die Grössen oder Zahlen, wovon man die eine von der andern subtrahiren, oder deren Unterschied man bestimmen soll, Grössen oder Zahlen von Einer Art seyn müssen, so wird uns die Untersuchung der Frage: Wenn sind Grössen oder Zahlen von Einer Art? die wir bey der Addition gehabt haben, hier sehr gut zu statten kom-

kommen. — Wo haben Sie denn, wenn Sie sonst subtrahirt haben, angefangen.

S. Zur Rechten.

L. Was meinen Sie? werden wir das auch immer thun?

S. Wenn wir solche Exempel haben, die aufgeschrieben werden müssen, so glaube ich es; allein wenn die Exempel im Kopfe ausgerechnet werden können, dann ist es vielleicht nicht nöthig, denn bey diesem Falle addirten wir auch lieber so, daß wir von der Linken anfiengen.

L. Ist das gut ausgedruckt, wenn man sagt, man fange oder solle zur Rechten oder zur Linken anfangen? Wie kann man an dessen statt sagen?

S. Von der niedrigsten Ordnung oder von der höchsten Ordnung.

L. Haben Sie nicht auch sonst noch zur Linken zu addiren angefangen?

S. Ja bey den Buchstabenexempeln.

L. Fiengen Sie alsdann auch bey der höchsten Ordnung an?

S. Bey den Buchstaben weiß man ja nicht wenn sie zu verschiedenen Ordnungen gehören, wo die höchste oder niedrigste sey.

L. Aus eben dem Grunde ist es auch bey den Buchstaben gleich viel, ob man zur Rechten oder zur Linken zu addiren anfängt. Wenn man wollte, so könnte man auch in der Mitte anfangen, nur gienge man alsdann nicht in einer geraden Linie

fort, sondern erst vorwärts dann rückwärts oder umgekehrt, und das wäre unbequem. Doch genug zur vorläufigen Betrachtung der Subtraction, jetzt zu ihr selbst, und zwar nach dem vorhergehenden erstlich zu dem Falle, wo man es mit benannten oder unbenannten Zahlen von der Art zu thun hat, daß man ihren Unterschied im Kopfe finden kann. — Ich habe gestern eine Rechnung erhalten, die 9 Rthlr. 18 Gr. und 6 Pf. beträgt. Wenn ich Ihnen nun 10 Rthlr. gäbe, und Ihnen auftrüge, daß Sie dieselben bezahlen sollten; wie würden Sie es machen?

S. Ich zählte erst 9 Rthlr. auf, dann 18 Gr. und zuletzt noch 6 Pf.

L. Und würden alsdann noch übrig haben?

S. 5 Gr. 6 Pf.

L. Würden Sie es auf eben die Art machen, wenn die Rechnung 12 Rthlr. 16 Gr. und 9 Pf. betrüge, und ich Ihnen 13 Rthlr. 8 Gr. und 6 Pf. gäbe? Ich meine: ob Sie alsdann auch zuerst die Thaler, dann die Groschen, und dann die Pfennige bezahlen würden?

S. Ja.

L. Wie viel würden Sie übrig behalten?

S. 15 Gr. und 9 Pf.

L. Wie finden Sie das?

S. Ich denke mir, daß, wenn ich von 13 Rthl. 12 Rthl. bezahlt habe, alsdann noch 1 Rthl. übrig

ist

ist, von diesen bezahle ich ferner in Gedanken 16 Gr., so habe ich noch 8 Gr. und endlich von diesen 8 Gr. auch die 9 Pf., so behalte ich 7 Gr. und 3 Pf., und diese nehme ich nun mit den 8 Gr. und 6 Pf., die mir von den 13 Rthl. 8 Gr. 6 Pf. übrig waren zusammen, und so erhalte ich 15 Gr. und 9 Pf. als den ganzen Rest.

L. Wenn man vom Gelde, welches man hat, dasjenige, was man schuldig ist, bezahlt, so nimmt man doch von jenem so viel weg, als dieses beträgt?

S. Allerdings.

L. Und wenn man dabey ausrechnet, wie viel man dabey behält, so subtrahirt man, nicht wahr?

S. Ja.

L. Subtrahiren Sie doch folgendes

148· Rthlr. 17 Gr. 9 Pf.
126 — 18 — 3 —

aber laute.

S. Hier sage ich: 3 Pf. von 9 Pf. abgezogen, bleiben 6 Pf., 18 Gr. von 17 Gr. geht nicht, sondern ich muß einen Thaler borgen, und ich mache daher bey die 8 einen Punct; 18 Gr. von 24 Gr. bleiben nun 6 Gr. und die 17 Gr. oben dazu machen 23 Gr.; 6 von 7 bleibt 1, denn die 8 gilt nun nur 7, weil ich eins dabey geborgt

 habe,

habe, 2 von 4 bleibt 2, und 1 von 1 läßt nichts. So ist also das Exempel fertig.

148 Rthlr.	17 Gr.	9 Pf.
126 —	18 —	3 —
21 Rthlr.	23 Gr.	6 Pf.

L. Wo fangen Sie hier die Subtraction an?

S. Zur Rechten.

L. Oder?

S. Von den Zahlen des niedrigsten Grades.

L. Machten Sie es vorhin auch so, als Sie im Kopfe rechnen mußten?

S. Nein, da zog ich erst die Thaler von den Thalern ab, dann gieng ich zu den Groschen, und nun erst zu den Pfennigen fort.

L. Welche Art ist nun die beste? Versuchen Sie einmal auf die Art, wie Sie das Exempel, wo 126 Rthlr. 18 Gr. 3 Pf. von 148 Rthlr. 17 Gr. und 9 Pf. abgezogen werden sollen, gerechnet haben, im Kopfe folgendes auszurechnen. Es sollen 324 Rthlr. 19 Gr. und 7 Pf. von 436 Rthlr. 17 Gr. und 8 Pf. abgezogen werden.

S. Das bin ich nicht im Stande, denn ich müßte mir dabey diese Zahlen alle aufgeschrieben vorstellen, und dann eben so rechnen, wie ich vorhin rechnete, und den Rest mir ebenfalls aufgeschrieben gedenken, und das wird zu viel zum Behalten.

L. Also ist es doch wohl auch nicht gut, bey der Subtraction immer von der Rechten oder den Zahlen der niedrigsten Ordnung anzufangen?

S. Lassen Sie mich doch einmal versuchen, ob ich dies Exempel im Kopfe werde ausrechnen können, wenn ich es so mache, als bey den ersten Exempeln. Wollen Sie mir wohl das Exempel noch einmal sagen?

L. Sehr gern. Es sollen von 436 Rthlr. 17 Gr. und 8 Pf. 324 Rthlr. 19 Gr. und 7 Pf. abgezogen werden.

S. Dann bleiben 111 Rthlr. 22 Gr. und 1 Pf.

L. Wie haben Sie das gemacht, daß Sie das so geschwind ausgerechnet haben?

S. Ich merkte mir die 436 Rthlr. 17 Gr. 8 Pf. genau, und da Sie sagten 324 Rthlr., so zog ich gleich diese Summe ab, und behielt also 112 Rthlr., 1 Rthlr. nahm ich davon, und zog von diesem die folgenden 19 Gr. und 7 Pf. ab, und da blieben 4 Gr. 5 Pf.; diese addirte ich endlich zu den 17 Gr. 8 Pf. der ersten Summe, die ich noch nicht mitgenommen hatte, und so erhielt ich 111 Rthlr. 22 Gr. 1 Pf.

L. Der Weg, den Sie eingeschlagen sind, ist der richtige, denn ihn geht man ja bey wirklichen Fällen im gemeinen Leben immer. Das gebe ich gern zu, daß man bey solchen Fällen, die man nicht im Kopfe auszurechnen im Stande ist, mit Nutzen von den Rechten oder von den Zahlen der

niedrigsten Ordnung zu subtrahiren anfangen kann; allein Fälle, die verschieden sind, müssen nicht nach einerley Regel behandelt werden. Wollen Sie indeß in der Fertigkeit auch Subtractionsexempel im Kopfe auszurechnen, es weit bringen, so müssen Sie ausserdem, daß Sie dabey oft von den Zahlen der höchsten Ordnung anzufangen, sich gewöhnen, auch ähnliche Uebungen als bey der Addition vorzunehmen. Schreiben Sie Sich also oft Exempel auf, wie folgende, und zwar je mehr desto besser

9,	6,	13,	17,	9,	80,	64,	73,	52,	80,	30,	56,	39
3,	2,	4,	8,	6,	2,	5,	2,	3,	6,	5,	4,	8

17,	31,	83,	96,	74,	83,	23,	56,	89,	23,	78,	38,	45,	36
9,	3,	9,	9,	9,	7,	6,	8,	9,	6,	9,	9,	8,	7

und subtrahiren Sie, nachdem Sie eine grosse Menge solcher Fälle Sich aufgesetzt haben, die unten stehenden Zahlen von den darüber stehenden, so geschwind, als irgend möglich. Eher aber müssen Sie mit dieser Uebung nicht aufhören, als bis Sie die Reste so geschwind hinschreiben können, daß man es Ihnen gar nicht anmerkt, daß Sie rechnen. Auch müssen Sie nicht bloß eintheilige Zahlen abziehen, sondern nach den eintheiligen auch zweytheilige z. E.

89,	39,	46,	45,	54,	63,	27,	13,	17,	98,	75,	28,	35,
16,	31,	24,	38,	26,	14,	19,	18,	12,	36,	56,	19,	27,

und

und dann zum wenigsten auch dreytheilige, z. E.

324,	456,	839,	742,	943,	725,	648,	729,	364,	594,
216,	314,	812,	416,	267,	329,	519,	264,	217,	318,

739,	845,	723,	812,	516,	815,	172,	361,	278,	145,
136,	812,	517,	396,	298,	286,	593,	219,	126,	124,

Je mehr Sie Sich in solchen Fällen üben, und je mehr Sie das Sich erwerben, daß Sie mit einer Schnelligkeit, wobey man Ihnen gar kein Nachdenken anmerkt, dergleichen vornehmen können, desto besser wird es für Sie seyn. Sie können auch auf folgende Art Zahlen unter einander schreiben

100	57	236	448
7	8	42	63
9	3	36	96
8	7	49	72
6	8	58	23
5	9	7	41
4	7	23	9
3	3	9	17
9	5	7	18
8	4	56	31
7	2	32	4

Diese

Diese Exempel rechnen Sie, nachdem Sie Sich zuvor mehrere aufgeschrieben haben, so, daß Sie zuerst den Rest von der obersten und der darunter stehenden suchen; dann ziehen Sie die dritte von diesem Reste, die vierte von dem jetzt erhaltenen Reste ab, u. s. w. Das erste Exempel würde ganz ausgerechnet so aussehen

```
 100
   7
 ---
  93
   9
 ---
  84
   8
 ---
  76
   6
 ---
  70
   5
 ---
  65
   4
 ---
  61
   3
 ---
  58
   9
 ---
  49
   8
 ---
  41
   7
 ---
  34
```

Vorzüglich aber kommt es hier darauf an, daß Sie die Reste so geschwinde zu finden sich üben, daß man Ihnen gar keine Mühe anmerkt. Jetzt wollen wir fortgehen zu solchen Exempeln benannter Zahlen, die man aufschreiben muß, um sich nicht zu irren, und die Art und Weise, wie man sich da zu verhalten hat, daher leiten, wie man bey wirklichen Vorfällen im Leben sich verhält. Es soll also jemand 348659 Rthlr. besitzen, und davon 269384 Rthlr. zu bezahlen haben. Stellen Sie Sich eine grosse Königliche Casse vor, da kann ein solcher Fall sehr leicht vorkommen. Wir schreiben uns also erst beyde Summen auf. Wie wohl?

S. So 348659 Rthlr.
269384 —

L. Stellen Sie Sich nun vor, daß der Cassirer der Casse, der die 365384 Rthlr. bezahlen sollte, das Geld, so er vorräthig hat, in Fässern Beuteln und Rollen und in einzeln Thalern hätte, so daß erst Fässer da wären mit Nro. 1. bezeichnet, wovon jedes 100000 Rthlr., dann andre mit Nro. 2. bezeichnet, wovon jedes 10000 Rthlr.; ferner noch andere von Nro. 3., wovon ein jedes 1000 Rthlr. enthielte. Ausser diesen hätte er nun auch Beutel zu 100 Rthl. und Rollen zu 10 Rthl. Da wir, wenn wir die Subtraction bey Exempeln verrichten, welche man ihrer Grösse wegen aufschreiben muß, von den Zahlen der niedrigsten Ordnung

nung zu subtrahiren anfangen; so müssen, wir uns auch, wenn wir dabey die rechte Art von einem Falle im gemeinen Leben lernen wollen, vorstellen, daß bey dem angeführten Falle der Schuldner die kleinsten Summen zuerst bezahle. Und nun nehmen Sie noch an, daß der, welcher das Geld zu fordern hat, wisse, daß der Schuldner Geld genug vorräthig habe, und setzen Sie den Fall, daß der Schuldner gern noch die Bezahlung der Schuld aufschieben wolle; oder stellen Sie Sich einmal, um Sich alles recht lebhaft gedenken zu können, vor, als ob Sie das Geld von mir zu fodern hätten. Wie würden Sie Sich dabey verhalten?

S. Ich habe hier, würde ich sagen, 269384 Rthlr. zu fordern; wollen Sie wohl so gütig seyn, und sie mir abtragen?

L. Sehr gern wollte ich es thun, würde ich antworten, wenn nur so viel vorräthig wäre; allein Sie sehen hier meinen Vorrath, es sind nur 9 Rthl. Davon will ich Ihnen gern die 4 Rthlr. bezahlen, wenn Sie nur mit den übrigen noch Geduld haben wollen.

S. Mit den 4 Rthlrn. kann ich nicht zufrieden seyn, ich muß mehr haben. Bezahlen Sie mir also, damit wir nur die kleinern Summen erst abthun, auch die 80 Rthlr.

L. Ich habe da zwar die 5 Zehnthaler-Rollen, allein diese reichen nicht hin, und ich wollte sie überdem gern behalten.

S.

S. Sie haben aber auch noch 100 Rthlr. Beutel. Nehmen Sie einen davon, und geben Sie mir daraus 8 mahl 10 Rthlr., so behalten Sie noch 2 Zehnthaler-Rollen übrig, und haben dann 7 solcher Rollen.

L. Sie sind hart, doch ich muß es schon thun, weil ich Sie sonst nicht loß werde. Aber nun habe ich nur noch 5 Hundertthaler-Beutel, die werden Sie mir doch lassen.

S. Drey kommen mir davon zu, und dann behalten Sie noch 2.

L. Da sind sie; allein mehr kann ich Ihnen heute nicht geben.

S. Ich habe aber auch 9000 Rthlr. zu fordern, und ich weiß, Sie haben Vorrath.

L. Acht Tausend Thaler habe ich wohl hier in diesen Fässern, allein die sind ja nicht hinreichend.

S. So nehmen Sie von den Fässern da, von den 1000 Rthlr. Fässern eins und geben Sie mir daraus meine 9000 Rthlr.; so behalten Sie noch 1000 Rthlr., und mit den vorigen 8000 Rthlr. haben Sie also nun doch noch 9000 Rthlr.

L. Allein dann kann ich Ihnen Ihre 60000 Rthlr. noch weniger geben, denn dazu müßte ich 6 solcher Fässer haben, als hier nun nur noch 3 stehen.

S. Das thut nichts. Nehmen Sie eins von den grössern Fässern dabey. In einem jeden

sind

sind 10 mal 1000 Rthlr., so behalten Sie noch 4 mal 10000 Rthlr. und haben also doch noch 7 mal 10000 Rthlr.

L. Aber nun werden Sie doch zufrieden seyn, denn zu 100000 Rthlrn. habe ich nur zwey Fässer, und wenn ich Ihnen also 2 mal 100000 Rthlr. geben soll, so behalte ich nichts übrig.

S. Ich kann Ihnen nicht helfen, ich muß auch diese Summen haben. Und wenn Sie auch keine 100000 Rthlr. behalten, was thut das? Sie haben ja noch 79275 Rthlr. und ich bin bezahlt.

L. So als wir uns den Fall hier vorgestellt haben, wird er nicht im gemeinen Leben vorkommen; wir mußten ihn aber so annehmen, um davon bequeme Regeln ableiten zu können. Ueberlegen Sie ihn nun nur recht, und sagen Sie mir, noch was für Regeln man die Subtraction verrichte?

S. Man schreibt zuvor die Zahl, von welcher eine andere subtrahirt werden soll, und darunter die zu subtrahirende so, daß die Zahlen von gleichem Grade oder gleicher Ordnung gerade unter einander kommen. Dann fängt man von der Rechten oder von den Zahlen des niedrigsten Grades an zu subtrahiren, und geht nach und nach bis zu den Zahlen des höchsten Grades fort. Nun kann aber ein doppelter Fall statt finden. Denn die Zahl, welche subtrahirt werden soll, ist entweder

klein

kleiner oder grösser, als die von welcher sie abzuziehen ist. Ist das erstere, so nimmt man von der obern Zahl so viel weg, als die untere beträgt, und schreibt den Rest darunter. Ist aber die untere Zahl grösser als die obere, so nimmt man von der in der obern Reihe zur Linken zunächst folgenden 1 in Gedanken weg, welches 10 von der unmittelbar folgenden Ordnung gilt, zieht die abzuziehende Zahl von dieser 10 ab, addirt den Rest zu der darüber stehenden, von welcher man nicht abziehen konnte, und schreibt diese Summe hin, und so fährt man bis ans Ende fort.

L. Wie rechnen Sie also das betrachtete Exempel?

348659 Rthlr.
269384 —

S. Ich sage 4 von 9 bleibt 5. 8 von 5 geht nicht, also 1 von der 6 genommen, welche dadurch 5 wird, 8 von 10 bleibt 2, und 2 und 5 ist 7. 3 von 5 bleibt 2; 9 von 8 geht nicht, 1 von der 4 genommen, 9 von 10 bleibt 1 und 8 macht 9; 6 von 3 geht nicht, 1 von der 3 genommen, 6 von 10 bleibt 4, und 4 und 3 macht 7; 2 von 2 bleibt nichts. Ich pflege aber, wenn ich von der zunächst zur Linken folgenden Zahl 1 nehme, solches mit einem Punkte zu bemerken, damit ich es nicht vergesse, daß ich es gethan habe. Dann sieht das Exempel so aus

 3˙4˙86˙59

```
  · · ·
  348659 Rthlr.
  269384 —
  ─────────────
   79275 Rthlr.
```

L. Es geht das allerdings wohl an, daß man dies thut, allein ein so kurzes Gedächtniß hat man doch auch wohl nicht leicht, daß man, wenn man nur mit einiger Aufmerksamkeit rechnet, sogleich vergessen sollte, daß man, wie man zu sagen pflegt, bey der nächsten Zahl 1 geborgt habe. Also müssen Sie Sich auch gewöhnen, ohne den gedachten Punkt doch jedesmal richtig zu subtrahiren. Wie rechnen Sie denn aber folgendes Exempel?

```
  54306
  26947
  ─────
```

S. Da nehme ich von der 3 jenseit der 0 eins weg, und dann wird die 3 eine 2 und die 0 eine 9.

L. Wie so?

S. Die 3 gilt eigentlich 30 Zehner, und wenn ich für die Stelle der 6 eins von den folgenden Zahlen nehme, so brauche ich nur einen Zehner. Eins von der 3 gilt nun 10 Zehner, 9 schreibe oder denke ich mir also in der Stelle der 0.

L. Wie aber folgendes?

```
  590006
  379287
  ──────
```

S. Wenn ich hier, 7 von 6 geht nicht, sage, so muß ich eins von der 9 nehmen, und dieses eine gilt nun 10 für die Stelle der 6, und 9 für die 3 darauf folgenden mit 0 angefüllten Stellen. Ich rechne also 7 von 10 bleibt 3, und 3 und 6 macht 9; 8 von 9 bleibt 1; 2 von 9 bleibt 7; 9 von 9 bleibt 0; 7 von 8 bleibt 1; und 3 von 5 bleibt 2. Es ist also der ganze Rest 210719.

L. Von den Zahlen 11, 12, 13 u. s. w. bis 19 muß man ohne sich im geringsten zu besinnen, sogleich jede eintheilige Zahl abziehen können. Dies vorausgesetzt, so ist es noch besser, wenn man bey dem Abziehen solcher Zahlen, wo die zunächst folgende zehnmal so viel bedeutet, als wenn sie eine Stelle weiter nach der entgegengesetzten Seite stünde, in dem Falle, daß man eins borgen muß, die abzuziehende Zahl nicht erst von 10 abzieht, und den Rest zu der darüber stehenden Zahl addirt, sondern sogleich die Zahl, von welcher man abzieht, um 10 vergrössert, welches leicht ist, und dann davon abzieht. Das Exempel

$$\begin{array}{r} 348659 \\ \underline{269384} \end{array}$$

würde ich so rechnen: $9-4=5$; $15-8=7$; $5-3=2$; $18-9=9$; $13-6=7$; $2-2=0$; und also $348659-269384=79275$. Indeß findet das angeführte auch nur alsdann statt, wenn die Zahl, bey welcher man

 borgt,

borgt, 10 von derjenigen gilt, für welche man borgt, denn in andern Fällen würde der Vortheil, den man hier durch das beschriebene Verfahren hat, ein Grund zu einer grössern Schwierigkeit werden. Z. E. wenn von

246 Rthl. 18 Gr. 6 Pf.

89 Rthl. 23 Gr. 9 Pf. abgezogen werden sollten, und man wollte da sagen: 9 Pf. von 6 Pf. geht nicht, also borgt man von dem folgenden 1 Gr. 1 Gr. und 6 Pf. sind 18 Pf. und 9 Pf von 18 Pf. bleibt 9 Pf.: ferner 23 Gr. von 12 Gr. geht nicht, also borgt man von dem folgenden 1 Rthl. 1 Rthl. und 17 Gr. machen 41 Gr. und 23 Gr. von 41 Gr. geben 18 Gr.: so wäre das offenbar viel mühsamer, als wenn man so rechnete 9 Pf. von 6 Pf. geht nicht; 9 Pf. von 1 Gr. abgezogen lassen 3 Pf., und 3 Pf. und 6 Pf. geben 9 Pf. Ferner 23 Gr. von 17 Gr. geht nicht, also borgt man 1 Rthlr. 23 Gr. von 1 Rthlr. abgezogen, bleibt 1 Gr. und dazu 17 Gr., so kommen 18 Gr. Aus dieser Ursach muß man daher jedesmal den statt findenden Fall überlegen, und nach seiner Beschaffenheit die beste Art des Verfahrens wählen. Es giebt aber auch noch eine andere Art ausser der bisher erwähnten, die in vielen Fällen mit Vortheil angebracht werden kann. Betrachten Sie nur das Exempel

348659
269384
79275

noch einmal genau, und zwar seinen Theilen nach; so werden Sie finden, daß so oft der Minuendus, oder die Zahl, von welcher abgezogen werden soll, kleiner als der Subtrahendus oder die Zahl, welche abgezogen werden muß, ist, der Rest um eben so viel kleiner ist als 10, um so viel die Zahl des Minuendus kleiner ist, als die Zahl des Subtrahendus. So ist 8—5=3, und 10—7=3; 9—8=1 und 10—9=1; 6—3=3 und 10—7=3. Also könnte man sich hier auch die Regel machen, daß man in dem Falle, wenn die Zahl des Minuendus kleiner ist als die Zahl des Subtrahendus, die Zahl des Minuendus von der Zahl des Subtrahendus abziehen, und den Rest von neuem von 10 subtrahiren, und die folgende Zahl des Minuendus dann eins weniger gelten lassen solle. Subtrahiren Sie nun darnach folgendes

397506954
378973498
18533456

S. (Welcher während des Rechnens die hier stehende Differenz hinschreibt). Viere von 8 bleibt 4, und 4 von 10 giebt 6; 4 von 9 bleibt 5 und 5 von 10 giebt 5; 4 von 8 bleibt 4; 3 von 6 bleibt 3; 0 von 7 bleibt 7, und 7 von 10 giebt 3; 4 von 9

giebt 5, und 5 von 10 giebt 5; 6 von 8 giebt 2, und 2 von 10 bleibt 8; 7 von 8 bleibt 1, und 3 von 3 geht auf.

L. Wenn indeß das Eine, welches man beym Subtrahiren bisweilen in Gedanken von den folgenden Zahlen der höhern Ordnung wegnimmt nicht 10 von der unmittelbar folgenden niedern Ordnung gilt; so muß man den Unterschied zwischen dem Minuendus und Subtrahendus, in dem Falle, daß der Minuendus kleiner als der Subtrahendus ist, nicht von 10, sondern von der Zahl abziehen, welche den Werth der höhern Ordnung gegen die unmittelbar darauf folgende niedere Ordnung gehalten, ausdruckt. Wird also, indem man Groschen subtrahirt, ein Thaler geborgt, so zieht man von 24; wird, indem man Pfennige subtrahirt, ein Groschen geborgt, so zieht man von 12 ab, und so in ähnlichen Fällen. Wenden Sie solches bey folgendem Exempel an

363 Rthlr.	16 Gr.	5 Pf.
179 —	19 —	9 —
183 Rthlr.	20 Gr.	8 Pf.

S. (Es wird wieder während des Rechnens die hier stehende Differenz hingeschrieben.) 5 Pf. von 9 Pf. bleiben 4 Pf., und 4 Pf. von 1 Gr. abgezogen, bleiben 8 Pf.; 15 Gr. von 19 Gr. geben 4 Gr., und 4 Gr. von 1 Rthlr. weggenommen, bleiben 20 Gr. 2 von 9 bleibt 7, und 7 von 10 bleibt 3; 5 von

von 7 giebt 2, und 2 von 10 macht 8; 1 von 2 läßt 1.

L. So haben wir nun drey Arten die Subtraction dann zu verrichten, wenn der Minuendus oder vielmehr einige Theile des Minuendus kleiner sind, als die Theile des Subtrahendus, die davon abgezogen werden sollen. Gesetzt nun, daß Sie 8 Rthlr. hätten, und jemanden 10 Rthlr. bezahlen müßten; wie würden Sie es alsdann machen, wenn von Ihnen die Bezahlung dieser 10 Rthlr. gefordert würde?

S. Ich könnte mir dann nicht anders helfen als so, daß ich ihm meine 8 Rthlr. gäbe, und die übrigen 2 Rthlr. schuldig bliebe.

L. Subtrahiren Sie also einmal 10 Rthlr. von 8 Rthlr.

S. Das kann ich nicht, denn hier ist keine Zahl von einer höhern Ordnung, wovon ich 1 borgen könnte.

L. Aber 10 Rthlr. von 10 Rthlr. können doch subtrahiret werden?

S. Ja, alsdann bleibt nichts übrig.

L. Wie viel fehlen Ihnen also noch an dem Minuendus, um die Subtraction so verrichten zu können, daß nichts übrig bleibt?

S. 2 Rthlr.

L. Können Sie nicht wenigstens dies anzeigen?

S. O ja durch das Zeichen —.

L. So thun Sie es.

S. Dann erhält das gegebene Exempel folgende Gestalt.

Von 8 Rthlr.
10 — abgezogen, bleiben
— 2 Rthlr.

L. Dies ist eine vierte Art, die Subtraction zu verrichten, wenn der Minuendus kleiner als der Subtrahendus ist, und eine Art, davon im gemeinen Leben Beyspiele genug vorkommen. Denn überhaupt kann man das, was der Minuendus ausdruckt, als dasjenige betrachten, was man besitzt, und das, was der Subtrahendus anzeigt, als etwas, so ein andrer zu fordern hat, und dann ist der Unterschied oder der Rest entweder dasjenige, was man nach der Bezahlung seiner Schuld übrig behält, wenn man nemlich mehr gehabt hat, als man schuldig war, oder dasjenige, was man noch schuldig bleibt, nachdem man so viel gegeben, als man geben konnte. Oft wird im gemeinen Leben auf Rechnungen abschläglich bezahlt, und dann entsteht der Fall, den wir so eben betrachtet haben, und er ist also nicht ungewöhnlich. — Denken Sie nun das bisher von der Subtraction durchgenommene für Sich durch; in unserer nächsten Unterredung wollen wir davon verschiedene Anwendungen machen, und die Subtraction zu Stande zu bringen suchen.

Achtes Gespräch.

L. Sie haben in unserer letzten Unterredung bereits alle Regeln der Subtraction gelernt, und müssen, die Bestimmung der Grössen, die von einerley Art sind, welche bey der Addition da gewesen, dazu genommen, im Stande seyn, jedes Subtractionsexempel gehörig aufzusetzen, und auszurechnen. Gleichwohl müssen wir uns heute noch bey dieser einfachen Rechnungsart verweilen, um die Anwendung der erlernten Regeln noch genauer uns bekannt zu machen, als sie es aus dem bisherigen seyn kann. Denn es ist ganz etwas anders: Regeln überhaupt zu kennen, und dieselben auf einen oder den andern Fall überhaupt anwenden zu wissen; und Regeln so zu kennen, daß man jeden vorkommenden Fall darnach nicht nur aufzulösen, sondern solches auch auf die leichteste und kürzeste Art thun könne. Dies letztere lernt man nur durch einen öftern und sorgfältigen Gebrauch der erlernten Regeln, und daher kann man von Regeln, die man versteht, nie zu viel einzelne Fälle betrachten, und dieselben darnach entscheiden. Man kommt dabey oft unvermuthet auf Fälle, wo man durch eine leichte Veränderung sich die erlernten Regeln noch brauchbarer machen

lernt, und wenigstens erwirbt man sich die Fertigkeit, vor der Ausrechnung der vorgelegten Fragen schnell zu bestimmen, welcher von den verschiedenen überhaupt möglichen Wegen in jedem Falle der beste sey. Gesetzt also, daß jemand von mir 356 Rthlr. 19 Gr. 7 Pf. zu fordern hätte, und ich ihm dieselben von 500 Rthlr., die ich besässe, bezahlen wollte, wie viel würde ich übrig behalten?

S. 143 Rthlr. 4 Gr. 5 Pf.

L. So schnell haben Sie das ausgerechnet, daß Sie mir gleich antworten, da ich kaum gefragt habe!

S. Ich habe auf die Art gerechnet, daß ich von den größten Zahlen zu subtrahiren angefangen habe. Von 500 Rthlr. zog ich zuerst 300 Rthlr. ab, und behielt also 200 Rthlr., von diesen dann 50 Rthlr., und da hatte ich noch 150 Rthlr., und 6 Rthlr. von 150 Rthlr. gaben mir 144 Rthlr. Von diesen nahm ich 1 Rthlr. in Gedanken weg, um die 19 Gr. und 7 Pf. davon abzuziehen, und merkte mir die 143 Rthlr.; von dem 1 Rthlr. aber zog ich die 19 Gr. 7 Pf. ab, und so kriegte ich noch 4 Gr. und 5 Pf.

L. Dies Verfahren war hier recht gut, ja vielleicht das beste unter allen sonst möglichen. Allein rechnen Sie dieses Exempel nun auch auf die übrigen Arten, wenigstens um deutlich zu sehen, ob die von Ihnen beobachtete Art auch wirklich die beste gewesen.

S. Dann schreibe ich

Von	500 Rthlr.			
	356 Rthlr.	19 Gr.	7 Pf.	abgezogen
bleiben	143 Rthlr.	4 Gr.	5 Pf.	

Denn von den 500 Rthlr. nehme ich 1 Rthlr. weg, um die 19 Gr. und 7 Pf. abziehen zu können, und von den 1 Rthl. wieder 1 Gr. um davon insbesondere die 7 Pf. zu subtrahiren, und rechne dann als wenn folgendes Exempel gegeben wäre

Von	499 Rthlr.	23 Gr.	12 Pf.	
	356 —	19 —	7 —	abgezogen
bleiben	143 Rthlr.	4 Gr.	5 Pf.	

L. Wenn man von 500 Rthlr. die Summe von 356 Rthlr. 19 Gr. und 7 Pf. bezahlen soll; so kann man auch wohl sagen, daß man 144 Rthlr. weniger 19 Gr. und 7 Pf. behalte?

S. Allerdings.

L. Und wenn nun gefragt wird, wie viel 144 Rthlr. weniger 19 Gr. und 7 Pf. sind, so wird man auch leicht die Antwort zu geben im Stande seyn: 143 Rthlr. 4 Gr. 5 Pf. Nicht wahr?

S. Ja, und mich dünkt, daß wenn man es sich auf diese Art vorstellt, die Ausrechnung noch etwas leichter wird.

L. Sie wird es allerdings, und zwar dadurch, daß man auf diese Art theilweise verfährt, und das zuerst gefundene, ehe man zu dem folgenden

den geht, gleichsam als fertig auf die Seite legt. Mit mehrerer Gewisheit rechnet man überdem auf diese Art. Und nicht wahr, nun ist es gut, daß wir, ausser den gestern da gewesenen, noch einen besondern Fall betrachtet haben?

S. O ja.

L. Betrachten Sie also dies Exempel auch noch in seiner zweyten Ausrechnung. Es war

Von 500 Rthlr.
356 Rthlr. 19 Gr. 7 Pf. abgezogen

bleiben 143 Rthlr. 4 Gr. 5 Pf.; und indem Sie diese Differenz ausrechneten, verfuhren Sie, als wenn folgendes Exempel gegeben gewesen wäre:

Von 499 Rthlr. 23 Gr. 12 Pf.
356 — 19 — 7 — abgezogen

bleiben 143 Rthlr. 4 Gr. 5 Pf. — Ob Sie

von 23 Gr.
19 Gr., oder
von 24 Gr.
20 Gr. abziehen, ist doch auch

ohnstreitig einerley? Denn Sie haben den Minuendus sowohl als den Subtrahendus um 1 vergrössert, und dadurch kann die Differenz nicht geändert werden.

S. Ja das ist vollkommen einerley.

L. Wird die Differenz geändert, wenn man den Minuendus und Subtrahendus um gleichviel

kleiner

kleiner macht? Z. E. wenn man anstatt 18 und 12 die Zahlen 14 und 8 nimmt, welche gegen die vorhergehenden gehalten um 4 kleiner sind.

S. Nein, auch hier ist die Differenz in beyden Fällen einerley.

L. Wie verhält es sich aber, wenn der Minuendus grösser gemacht, der Subtrahendus aber nicht verändert wird? z. B. wenn man anstatt 4 von 8 abzuziehen, 4 von 12 subtrahiret?

S. Dann wird offenbar die Differenz um so viel grösser, als man den Minuendus vergrössert hat, z. B. 4 von 8 läßt 4, 4 von 12 aber 8.

L. Und wenn man den Minuendus unverändert läßt, dagegen aber den Subtrahendus grösser macht? z. B wenn man anstatt 4 von 8 abzuziehen, 6 von 8 subtrahirt?

S. Dann wird die Differenz kleiner, und zwar um so viel, als man den Subtrahendus vergrössert hat.

L. Umgekehrt verhält es sich auf eine ähnliche Art, und daraus ergeben sich sehr leicht die Antworten auf folgende Fragen: Wie verhält sich die Differenz, wenn so wohl der Minuendus als der Subtrahendus entweder um gleichviel vergrössert, oder um gleich viel vermindert werden?

S. Die Differenz wird dadurch nicht verändert.

L.

L. Wenn aber der Subtrahendus derselbe bleibt und der Minuendus grösser genommen wird?

S. Dann wird die Differenz um eben so viel grösser.

L. Und wenn unter der angeführten Bedingung der Minuendus vermindert wird?

S. Dann wird die Differenz um eben so viel kleiner.

L. Wenn aber der Minuendus derselbe bleibt, und der Subtrahendus grösser genommen wird?

S. So wird die Differenz um eben so viel kleiner.

L. Und wenn der Subtrahendus kleiner genommen wird?

S. So wird dadurch die Differenz grösser.

L. Ob man also von den Minuendus 1 wegnimmt, oder den Subtrahendus um 1 vergrössert, ändert das in der Differenz etwas?

S. Nein; denn dadurch, daß man von den Minuendus 1 wegnimmt, wird die Differenz um 1 kleiner, und eben das geschieht, wenn man den Subtrahendus um 1 grösser macht.

L. Also ist es in dem Falle, daß man, um subtrahiren zu können, 1 von der nächsten höhern Ordnung zu Hülfe nehmen muß, auch gleich viel, ob man die Zahl des Minuendus dieser Ordnung

um

um 1 vermindert, oder die darunter stehende Zahl des Subtrahendus um 1 vergrössert?

S. Ja das ist einerley.

L. Wie könnten Sie daher das gegebene Exempel auch sonst noch rechnen?

S. So:

Von 500 Rthlr.
356 Rthlr. 19 Gr. 7 Pf. abgezogen

bleiben 143 Rthlr. 4 Gr. 5 Pf. Denn 7 Pf. von 12 Pf. bleiben 5 Pf. 20 Gr. von 1 Rthlr. bleiben 4 Gr. und 357 Rthlr. von 500 Rthlr. bleiben 143 Rthlr. Diese Art ist wieder leichter, als die vorhergehende.

L. Hier allerdings, und in allen ähnlichen Fällen, d. h. wenn man nicht bey der unmittelbar folgenden Ordnung borgen kann. So würde sie auch bey folgendem Exempel den Vorzug verdienen.

Von 5000630005
2384213426 abgezogen

bleiben 2616416579. In andern Fällen ist eben kein Unterschied unter beyden Arten zu borgen, um diesen Ausdruck zu gebrauchen. Ja wenn die Zahl des Subtrahendus, zu welcher man 1 zusetzen soll, eine 9 ist, so wird die dadurch in eine 10 verwandelt, und dann muß man also die 9 als 0 betrachten, und die folgende Zahl des Subtrahendus sich um 1 vergrössert gedenken. In diesem Falle ist diese letztere Art nicht einmal zu rathen,

und

und so haben Sie auch hier wieder ein Beyspiel zur Erläuterung des Satzes, daß die kurzen Arten zu rechnen, oder die practischen Vortheile nicht allenthalben Verkürzungen oder Erleichterungen der Rechnung sind, sondern jeder nur in besondern Fällen. Die Punkte übrigens, welche in dem vorhergehenden Exempeln bey den Zahlen des Subtrahendus stehen, wozu 1 gesetzt worden ist, braucht man, so bald man einige Fertigkeit hat, sich eben so wenig hinzusetzen, als solches bey dem Borgen oben dann nöthig ist. Hier sind sie nur gesetzt, um in diesem Exempel diese Zahlen auszuzeichnen. — Nun zu solchen Exempeln, welche Zehntheiler enthalten.

Von 345,3205634
26,2934568 abgezogen, was bleibt?

S. 319,0271066. Dergleichen Exempel unterscheiden sich von den Exempeln, worinn keine Zehntheiler vorkommen, eben so, als die ihnen ähnlichen Additionsexempel, weiter nicht, als daß man nur auf die Stelle der Einer in so fern zu merken hat, daß man da das Comma zu setzen nicht vergißt.

L. Also können wir es auch bey einigen wenigen Exempeln schon bewenden lassen. — Wie rechnen Sie folgendes?

Von 3,[illegible]694783
5,3493864 abgezogen, was bleibt?

S.

S. Hier ist der Subtrahendus aber grösser als der Minuendus?

L. Wir haben ja bereits einen solchen Fall betrachtet.

S. Ja den, da von 8 Rthlr. 10 Rthlr. abgezogen werden sollten. Da konnte ich aber gleich beurtheilen, wie viel noch fehlte, um die Subtraction so zu verrichten, daß die Differenz 0 würd; allein das bin ich hier nicht im Stande.

L. Wie fanden Sie denn bey dem Exempel, da 10 Rthlr. von 8 Rthlr. abgezogen werden sollten, daß noch 2 Rthlr. an dem Minuendus fehlen, ehe Sie auf die gedachte Art subtrahiren können?

S. Ich ziehe 8 Rthlr. von 10 Rthlr. ab.

L. Also den Minuendus von dem Subtrahendus?

S. Ja.

L. Können Sie das hier nicht auch thun?

S. Das ist leicht. Also

von 3,2694783
5,3493864 abgezogen,
kommt — 2,0799081

L. Hier wußten Sie Sich nicht zu helfen, ohnerachtet dies Exempel mit dem damit verglichenen, was Ihnen gar keine Schwierigkeit gemacht hat, im Wesentlichen gar nicht verschieden ist. Lassen Sie Sich dies ebenfalls zum Beweise dienen, daß eine fleißige und sorgfältige Anwendung der

erlernten Regeln auf einzelne Fälle schlechterdings nothwendig sey, um nicht bisweilen da Schwierigkeiten zu finden, wo man im Grunde doch über das nöthige Verfahren unterrichtet ist. Doch noch eins. Sie können das, was in dem eben ausgerechneten Exempel fehlt, auch noch auf eine andere Art finden. Rechnen Sie einmal, als wenn Sie nicht bemerkt hätten, daß der Subtrahendus grösser als der Minuendus ist.

S. Von 3,2694783
5,3493864 abgezogen

bleibt ,9700919. Weiter kann ich nicht kommen, denn nun fehlten mir noch 3, weil ich bey der 3 geborgt habe.

L. Schreiben Sie das hin.

S. Die Differenz ist also — 3,9700919.

L. Fehlen hier aber die 0,9700919 auch?

S. Nein, sondern wenn man diese 0,9200919 als den Rest betrachtet, so fehlen 3.

L. Ziehen Sie nun einmal von 3
0,9700919 ab.

S. Denn kommt — 2,0299081

L. Ob Sie also — 3,9200919 oder — 2,0299081 zur Differenz annehmen, das ist gleich, wenn Sie nur in der 2ten Differenz alles als etwas fehlendes, in der ersten aber bloß die 3 so betrachten. Auch diese letzte Art zu subtrahiren werden wir in der Folge gebrauchen, und da-

her wollen wir sie uns jetzt nur noch durch einen Fall aus dem gemeinen Leben erläutern. Gesetzt ich hätte nicht mehr als 15 Rthlr. 18 Gr. und 6 Pf., und sollte jemanden 20 Rthlr. bezahlen; es verlangte aber derselbe, da ich ihm doch nicht die ganze Schuld abtragen könnte nur meine 15 Rthl. Wie viel bliebe ich ihm nun noch schuldig?

S. 5 Rthlr.

L. Und hätte von meinen 15 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf. nun gar nichts mehr?

S. Ja, noch 18 Gr. 6 Pf.

L. Wenn mir also nicht 5 Rthlr. fehlten, so behielte ich noch 18 Gr. 6 Pf. übrig, ohne etwas schuldig zu seyn?

S. Ja.

L. Das Zeichen — zeigt das was fehlt an, und + was da ist. Also könnte ich doch diesen Fall auf folgende Art ausdrucken:

Von 15 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf.
20 Rthlr. abgezogen, bleibt
— 5 Rthlr. + 18 Gr. + 6 Pf.

S. Ja.

L. In dem Falle, wo wir diese Art zu subtrahiren gebrauchen werden, nimmt man nun ein für allemal an, daß das Zeichen — sich bloß auf die Zifer vor dem Comma beziehe, und daß also die übrigen Zifern nach dem Comma als positiv betrachtet werden sollen, und da ist also diese Art

der Subtraction ausserordentlich bequem. Für die Fälle, die nun noch übrig sind, darf ich Ihnen nur einige Exempel geben. Was bleibt also übrig, wenn man von

$$\begin{array}{l} 17a + 13b - 4c \\ \underline{\;\;9a + \;\;4b - 2c} \text{ subtrahirt?} \end{array}$$

S. $8a + \;\;9b - 2c.$

L. Und wenn man von

$$\begin{array}{l} 24a + 17b + 6c - 3d \\ \underline{\;\;8a + 23b + 7c - 9d} \text{ subtrahirt?} \end{array}$$

S. $- 16a - \;\;6b - \;\;c + 6d.$

L. Wie haben Sie hier gerechnet?

S. 8a von 24a bleiben 16a; 23b von 17b geht nicht, da fehlen mir 6b, ehe ich abziehen kann. Weil ich aber nirgends borgen kann, so merke ich mir, daß diese 6b mir fehlen, nur an. Eben so finde ich, daß 7c von 6c abgezogen — c geben. — 9d endlich von 3d abzuziehen, ist unmöglich, ich müßte zu — 9d erst 6d haben, ehe ich abziehen könnte. Da ich aber dieselbe nirgends entlehnen kann, so merke ich an, daß erst 6d noch da seyn müssen, und das ist die Bedeutung von + 6d.

L. Hier haben wir ein Subtractionsexempel, worinn die Zeichen + und — vorkommen. Dergleichen haben wir noch nicht gehabt, und wir müssen uns also bey diesem Exempel ein wenig verweilen, um zu sehen, ob wir uns nicht einige

Regeln zur leichten Ausrechnung von dergleichen Exempel ableiten können. Die drey Fälle, da +23b, +6c von 17b, +7c, und —9d von —3d abgezogen werden sollten, sind hier allein zu betrachten. Wie sind sie beschaffen?

S. Was meinen Sie damit?

L. Sie sollen mir sagen, was der Minuendus und Subtrahendus besonders an sich haben?

S. Beyde haben einerley Zeichen, aber der Subtrahendus ist grösser als der Minuendus.

L. Hat die Differenz dasselbe Zeichen, was der Minuendus und Subtrahendus haben?

S. Nein, sondern das entgegenstehende.

L. Wenn wir also nach diesem Exempel urtheilen wollen, so hat, wenn bey dem Minuendus und Subtrahendus die Zeichen + und — vorkommen, und zwar so, daß bey beyden einerley Zahlen stehen, und der Subtrahendus grösser ist, als der Minuendus, die Differenz immer das entgegenstehende Zeichen. Wie ist nun aber das übrige beschaffen? oder wie finden Sie es?

S. Ohne mich an die Zeichen dann weiter zu kehren, ziehe ich den Minuendus von dem Subtrahendus ab.

L. Wie haben Sie es bey dem Anfange dieses Exempels gemacht, da 8a von 24a abgezogen werden sollten; und bey dem vorhergehenden, als Sie an —2c von —4c kamen?

S. Da habe ich die Zeichen der Differenz behalten, und ordentlich abgezogen.

L. In allen Fällen haben Sie dann doch hier bey dem Minuendus und Subtrahendus einerley Zeichen gehabt?

S. Ja, nur mit dem Unterschiede, daß bisweilen der Minuendus, und bisweilen der Subtrahendus grösser war.

L. Und in allen Fällen haben Sie, dünkt mich, um die Differenz zu finden, das kleinere von dem grössern abgezogen, es mogte nun das kleinere ein Theil des Minuendus oder des Subtrahendus seyn?

S. Ja; allein wenn der Subtrahendus grösser war, so setzte ich bey der Differenz das entgegenstehende; wenn er aber kleiner als der Minuendus war, dasselbe Zeichen, was der Minuendus und Subtrahendus hatten.

L. Wie viel Fälle giebt es also nach dem bisherigen bey der Subtraction solcher Exempel, wo der Minuendus und Subtrahendus die Zeichen + und — vor sich haben?

S. Zwey; die Zeichen des Minuendus und Subtrahendus sind immer gleich, allein der Minuendus ist entweder grösser oder kleiner als der Subtrahendus.

L. Und wie verhält man sich in beyden Fällen bey der Subtraction?

S. Man zieht in beyden Fällen das kleinere von dem grössern ab, ohne sich daran zu kehren, ob das kleinere im Minuendus oder im Subtrahendus stehe, und setzt, wenn der Minuendus grösser ist, dasselbe, wenn er aber kleiner ist, das entgegenstehende Zeichen.

L. Bisher haben wir diese Regel nur von einzelen Fällen abgeleitet. Auf diese Art erhielt man freylich, wenn man recht verfährt, wahre Regeln, allein man sieht sie doch nicht mit voller Gewisheit ein. Damit Sie also auch von der Wahrheit dieser Regeln mit Gewisheit überzeugt werden, so wollen wir zu dem bisherigen noch eine kurze Betrachtung setzen. Was müssen Sie thun, wenn der Subtrahendus kleiner ist, als der Minuendus, um den Unterschied von beyden zu finden?

S. Ich muß sehen, wie viel ich zu dem Subtrahendus setzen muß, damit er dem Minuendus gleich werde.

L. Und das, was Sie hinzusetzen müssen, muß doch mit dem Subtrahendus und Minuendus von einerley Art seyn?

S. Allerdings.

L. Also doch auch + vor sich haben, wenn der Minuendus und Subtrahendus dies Zeichen hat, und —, wenn vor dem Minuendus und Subtrahendus diese Zeichen stehen?

S. Ja.

L. Wenn von +14a die Grösse +6a abgezogen werden sollen, so ist der Unterschied +8a; denn +8a und +6a machen zusammen +14a. Eben so ist der Unterschied, wenn von —34a die Grösse —16a abgezogen werden soll, —18a, denn —18a und —16a machen zusammen —34a. Anders den Unterschied in Ansehung der Zeichen angenommen, so erhält man durch Zusammennehmung der Differenz und des Subtrahendus den Minuendus nicht wieder, und dies muß gleichwohl seyn, wenn man richtig subtrahirt haben will. Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich nun auch in dem andern Falle; doch wird es besser seyn, daß ich davon zu einer andern Zeit mit Ihnen rede. Jetzt rechnen Sie nun nach den bisher erlernten Regeln einige Exempel aus. Was kommt also, wenn man von 36 Centn. 8 Pfund 19 Loth und 3 Quentchen, 29 Centn. 57 Pf. 28 Loth und 2 Qu. abzieht? Der Fall fände statt, wenn ein Kaufmann 36 Centn. 8 Pf. 19 Loth und 3 Qu. von einer Waare vorräthig gehabt, und darauf 29 Centn. 27 Pf. 28 Loth und 2 Qu. verkauft hätte.

S. Dies Exempel setzte ich so:

Von	36 Centn.	8 Pf.	19 Loth	3 Qu.	
	29 —	57 —	28 —	2 —	abgezogen
bleiben	6 Centn.	60 Pf.	23 Loth	1 Qu.	

L. Wie haben Sie hier gerechnet?

S.

S. 2 Qu. von 3 Qu. bleibt 1 Qu.; 19 Loth von 28 Loth bleiben 9 Loth, und 9 Loth von 32 Loth bleiben 23 Loth; 7 Pf. von 57 Pf. bleiben 50 Pf., und 50 Pf. von 110 Pf. bleiben 60 Pf.; 29 Cent. von 35 Centn. bleiben 6.

L. Sind Sie aber auch ganz gewiß, daß die gefundene Differenz die wahre ist?

S. O ja.

L. Hier wohl; allein in allen Fällen mögten Sie es doch wohl nicht seyn, wenn Sie nicht entweder eines ähnlichen Mittels sich bedienen, als in der Addition, aber sonst einen andern Weg einschlagen.

S. Also meinen Sie, daß es auch hier gut sey, ein und dasselbe Exempel auf verschiedene Art zu rechnen?

L. So lange man irgend Ursache zu befürchten hat, daß man gefehlt haben könne, ist es allerdings zu rathen, und dann erst zu behaupten, daß man ohne allen Fehler die Differenz gefunden habe, wenn die betretenen verschiedenen Wege zu einerley Unterschied geführet haben. Indeß ist hier auch noch ein andrer Weg möglich. Da nemlich die Differenz nur dasjenige anzeigt, was man zu dem Subtrahendus setzen, oder von demselben wegnehmen muß, damit er dem Minuendus gleich werde; so darf man nur nach verrichteter Subtraction die Differenz und den Subtrahendus addiren und die Summe von beyden mit dem Minuendus

vergleichen. Sind beyde gleich, so ist offenbar die Differenz, die man gefunden hat, die wahre. Gesetzt also, daß Sie von der Richtigkeit der so eben gefundenen Differenz noch nicht überzeugt wären, wie würden Sie es machen?

S. Mir scheint der der leichteste Weg zu seyn, wenn man die Differenz und den Subtrahendus addirt, und ihre Summe mit dem Minuendus vergleicht. Ich würde also sagen:

Von	36 C. 8 Pf. 19 Loth 3 Qu.	
	29 — 57 — 28 — 2 —	abgezogen
bleiben	6 C. 60 Pf. 23 Loth 1 Qu.	weil die Sum̃e dieser Differenz und des Subtrahendus
	36 C. 8 Pf. 19 Loth 3 Qu.	ist.

L. Subtrahiren Sie nun auch $9a+7b-3c+14d$ von $19b+36a-17c+35d$.

S. Dies Exempel setze ich so:

Von	$36a+19b-17c+35d$	
	$9a+7b-3c+14d$	abgezogen
bleiben	$27a+12b-14c+21d$	Deñ diese Differenz mit dem Subtrahendus addirt giebt
	$36a+19b-17c+35d$	

L. Welches der Minuendus sey und welches der Subtrahendus, versieht sich in den mehresten Fällen von selbst, und gewöhnlich setzt man den Minuendus zuerst, und den Subtrahendus drunter. Dies vorausgesetzt, so können Sie bey der

Auf-

Aufsetzung der Subtractionsexempel verschiedenes ersparen, und die Differenz haben Sie auch nur nöthig ohne Beywort unter den Strich zu setzen. Die Summe der Differenz und des Subtrahendus kann man, wenn man die Probe macht, auch gleich theilweise mit dem Minuendus vergleichen, und hat alsdann nicht nöthig, sie besonders aufzuschreiben. Handeln Sie hiernach bey folgenden Exempeln, die ich Ihnen selbst aufsetzen will.

$$\begin{array}{rl} & 5a+3b-7c-9d \\ & 3a+9b-12c-3d \\ \hline S. & 2a-6b+5c-6d. \end{array}$$

(Diese Differenz schreibt der Schüler nach und nach hin, und überlegt, so wie er einen Theil derselben gefunden und hingeschrieben hat, durch die Addition desselben mit dem gleichnahmigen Theile des Subtrahendus, ob er richtig gerechnet habe. Auf eben die Art verhält es sich bey den folgenden Exempeln.)

L. Nun folgendes:

$$\begin{array}{rl} & 5\times3\times6+4\times2\times5-3\times6-9\times3\times4 \\ & 2\times3\times6+9\times2\times5-9\times6-3\times3\times4 \\ \hline S. & 3\times3\times6-5\times2\times5+6\times6-6\times3\times4 \end{array}$$

L. Ferner

$$\begin{array}{rl} & 6ab-9ac+3cb \\ & 5ab-17ac+8cb \\ \hline S. & ab+8ac-5cb \end{array}$$

L.

L. Desgleichen

$$\begin{array}{l} 3a^4 + 91b^2 - 13c^3 - 5d^5 \\ a^2 + 9b^2 - 8c^3 - 12d^5 \\ \hline \end{array}$$

S. $2a^4 + 82b^2 - 5c^3 + 7d^5$

L. Und

$$\begin{array}{l} 17a^{\frac{1}{4}} - 13b^{\frac{1}{2}} + 8c^{\frac{1}{3}} \\ 8a^{\frac{1}{4}} - 9b^{\frac{1}{2}} + 19c^{\frac{1}{3}} \\ \hline \end{array}$$

S. $9a^{\frac{1}{4}} - 4b^{\frac{1}{2}} - 11c^{\frac{1}{3}}$

L. Nun

$$\begin{array}{l} \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{5}{9} \\ \frac{2}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{6} + \frac{7}{8} - \frac{7}{9} \\ \hline \end{array}$$

S. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} - \frac{4}{8} + \frac{2}{9}$.

L. Ferner

$$\begin{array}{l} \frac{4a}{b} - \frac{5d}{e} + \frac{6e}{f} \\ \frac{2a}{b} - \frac{3d}{e} + \frac{2e}{f} \\ \hline \end{array}$$

S. $\frac{2a}{b} - \frac{2d}{e} + \frac{6e}{f}$,

L. Endlich

$$\begin{array}{l} \frac{ab}{c} + \frac{2c^3}{d} - \frac{5d^{\frac{1}{2}}}{e} + \frac{6f^{\frac{1}{4}}}{g} \\ \frac{3ab}{e} + \frac{c^3}{d} - \frac{6d^{\frac{1}{2}}}{e} + \frac{12f^{\frac{1}{4}}}{g} \\ \hline \end{array}$$

S. $-\frac{2ab}{c} + \frac{c^3}{d} + \frac{d^{\frac{1}{2}}}{e} - \frac{6f^{\frac{1}{4}}}{g}$,

L.

L. Sie sehen hier, wie leicht alles ist, nachdem wir von den Grössen, die hier vorkommen, bereits bey der Addition gesprochen haben. Bey der Addition konnten wir so geschwind nicht fertig werden, als hier, allein je weiter wir kommen, desto weniger müssen wir uns auch nöthig haben aufzuhalten, und zwar um so viel weniger, je sorgfältiger und weitläuftiger wir im Anfange gewesen sind. Aus dieser Ursache bin ich daher auch bey der Addition und Subtraction weitläuftig gewesen. Die Vereinigung entgegengesetzter Grössen, und die Bestimmung ihres Unterschiedes, welche nunmehr folgen, werden uns aber dagegen desto weniger Zeit wegnehmen, und hier werden Sie also sogleich von dem behaupteten einen Beweis erhalten. Nachher muß ich noch einmal bey der Multiplication und Division weitläuftig seyn, darauf aber kann ich geschwindere Schritte thun. *)

*) Ich werde in der Nachschrift, der ich in der Vorrede Erwähnung gethan, die Weitläuftigkeit, welche ich bey der Erklärung der Regeln der Addition und Subtraction nicht habe vermindern können, und bey der Multiplication und Division ebenfalls mir erlauben muß, aus Gründen zu rechtfertigen suchen, die dann desto eher Eingang finden werden, da alsdann dasjenige, was zum vollen Verständniß derselben nöthig ist, vorangegangen ist. So wie überhaupt am Ende am besten über etwas geurtheilt werden kann, so findet solches bey einer solchen Art des Unterrichts, als ich in diesen Gesprächen gewählt habe, ohnstreitig in einem noch höhern Grade statt.

Neuntes Gespräch.

L. Nun wollen wir also die Regeln der Vereinigung entgegengesetzter Grössen kennen zu lernen suchen, und es wird, wie ich Ihnen neulich schon gesagt habe, nicht nöthig seyn, daß wir uns lange dabey verweilen. Sind Ihnen nicht etwa entgegengesetzte Grössen, die wirklich im gemeinen Leben vorkommen, bekannt?

S. O ja, z. B. Vermögen und Schulden.

L. Gut; allein warum nennen Sie Vermögen und Schulden entgegengesetzte Grössen?

S. Deswegen, weil diese beyden Arten der Grössen zusammen genommen, einander entweder aufheben, oder doch verringern. Hat jemand eben so viel Vermögen, als er schuldig ist, so hat er eigentlich nichts; hat er Vermögen und Schulden, aber doch mehr Vermögen als Schulden, so ist sein Vermögen eigentlich der Ueberschuß dessen, was er hat, über das, was er schuldig ist, und so verhält es sich auch, wenn seine Schulden grösser als sein Vermögen sind.

L. Was antworten Sie also auf die Frage: Was besitzt der, der 48 Rthlr. hat, und 30 Rthlr. schuldig ist?

S. 18 Rthlr.

L. Wie finden Sie das?

S. Ich ziehe so viel von dem, was er hat, ab, als seine Schulden betragen.

L. Was hat aber der, der 60 Rthlr. hat und 90 Rthlr. schuldig ist?

S. 30 Rthlr. Schulden.

L. Wie finden Sie das?

S. Auf eben die Art, auf welche ich vorher fand, daß 48 Rthlr. Vermögen und 30 Rthlr. Schuld 18 Rthlr. Vermögen geben.

L. Und finden Sie hier also das, was Sie suchen, durch die Addition oder durch die Subtraction?

S. Durch die Subtraction. Im ersten Falle subtrahirte ich 30 Rthlr. von 48 Rthlr., und im andern 60 Rthlr. von 90 Rthlr.

L. Welches ist denn jedesmal Ihr Subtrahendus?

S. Das kleinere.

L. Und was geben Sie dem Reste oder der Differenz für eine Benennung?

S. Diejenige, welche die grössere Summe gehabt hat.

L. Sind Sie auch wohl im Stande, diese Frage zu beantworten: Was hat der, der einmal 40 Rthlr. und ausser ihnen auch 35 Rthlr. besitzt, dagegen aber an einem Orte 20 Rthlr. und an einem andern 30 Rthlr. schuldig ist?

S. Er hat 25 Rthlr.

L. Wie fangen Sie es hier an, um die erforderliche Antwort zu finden?

S. Ich addire entweder die verschiedenen Summen von dem, was er hat, darnach die Summen, die er schuldig ist besonders, und ziehe, wenn ich sie gefunden habe, das kleinere von dem grössern ab, oder ich subtrahire stückweise das kleinere von dem ihm entgegengesetzten grössern, bis ich nichts mehr übrig habe. Ich kann z. B. auf folgende Art rechnen. 40 Rthlr. und 35 Rthlr. machen 175 Rthlr. und 20 Rthlr. und 30 Rthlr. machen 50 Rthlr.; also hat der, von dem gesprochen wird 175 Rthlr. im Vermögen und 50 Rthlr. Schulden. 50 Rthlr. Schulden von 75 Rthlr. Vermögen bezahlt, bleiben 25 Rthlr. Vermögen. Wenn man aber diesen Weg nicht nehmen will, so kann man auch die 20 Rthlr. Schuld von den 40 Rthlr. Vermögen, und die 30 Rthlr. Schuld von den 35 Rthlr. Vermögen tilgen, und dann bleiben erstlich 20 und dann 5 Rthlr. also zusammen 25 Rthlr. Vermögen.

L. Es bezeichne also, da Vermögen und Schulden entgegengesetzte Grössen sind, das Zeichen + das Vermögen und — die Schulden. Was kommt, wenn + 5 Rthlr. — 6 Gr. + 9 Pf. + 3 Pf. 9 Gr. + 15 Rthlr. — 30 Rthlr. + 15 Gr. — 6 Pf. + 3 Rthlr. + 26 Rthlr. — 5 Gr. — 4 Pf. vereiniget werden sollen?

S.

S. Auf diese Fragen kann ich nicht sogleich antworten. Hier muß ich die genannten Summen erst aufschreiben. Wollen Sie mir dieselben wohl noch einmal sagen? (Der Lehrer thut solches, und der Schüler schreibt und rechnet auf folgende Art.)

+ 5 Rthlr. — 6 Gr. + 9 Pf.
+15 Rthlr. — 9 Gr. + 3 Pf.
+ 3 Rthlr. — 5 Gr.
+26 Rthlr.
+49 Rthlr. — 20 Gr. + 12 Pf.
—30 Rthlr. + 15 Gr. — 10 Pf.
+19 Rthlr. — 5 Gr. + 2 Pf.

— 30 Rthlr. + 15 Gr. — 6 Pf.
— 4 Pf.
— 30 Rthlr. + 15 Gr. — 10 Pf.

L. Das wäre nun erstlich nicht nöthig gewesen, daß Sie das Zeichen + im Anfange hingesetzt hätten, denn da versteht es sich, wenn es nicht gesetzt wird, von selbst. Und was meinen Sie? Sollte man nicht gleichwohl alle gleichnamige mit + bezeichnete Grössen addiren können, ohne aus Versehen eine von den mit — bezeichneten darunter zu nehmen, wenn auch so aufgesetzt würde?

5 Rthlr. —	6 Gr. +	9 Pf.
15 Rthlr. —	9 Gr. +	3 Pf.
— 30 Rthlr. +	15 Gr. —	6 Pf.
3 Rthlr. —	5 Gr. —	4 Pf.
26 Rthlr.		

S. O ja; die Grössen, die mit + bezeichnet sind, sind von den mit — bezeichneten hinlänglich unterschieden.

L. Daher pflegt man auch auf diese und nicht auf die Art, die Sie erwählten, dergleichen Exempel aufzusetzen, in welchen entgegen gesetzte Grössen zu vereinigen vorkommen. Man hat auch dadurch den Vortheil, daß man, wenn es bequem ist, nicht erst alle Grössen von einer Art addiren darf. So könnte man z. E. hier sagen: 5 Rthlr. und 15 Rthlr. machen 20 Rthlr. und — 30 dazu, so erhält man — 10 Rthlr. — 10 Rthlr. und 29 Rthlr., denn 26 Rthlr. und 3 Rthlr. sind 29 Rthlr., machen 19 Rthlr. Nun werden Sie also auch wohl folgendes Exempel rechnen können. 13a — 5c + 3b + 91a — 51b + 34c — 9d + 5a — 39a — 21b + 16c — 12b — 3c + 2d — 86a.

S. Dies setze ich so auf

$$
\begin{array}{r}
13a + 3b - 5c \\
91a - 51b + 34c - 9d \\
5a - 21b + 16c + 2d \\
-39a - 12b - 3c \\
-86a \\
\hline
-16a - 81 + 42c - 7d
\end{array}
$$

und finde durch die Vereinigung

L. Auf diese Art wird es überflüssig seyn, die angeführten Exempel von der Vereinigung entgegen gesetzter Grössen noch mit vielen andern zu vermehren. Wenn Sie nur immer das vor Augen behalten, daß Sie keine andere als gleichnamige Grössen unter einander setzen, so werden sich Ihnen bey keinem Exempel Schwierigkeiten, die Sie Sich nicht sollten heben können, in den Weg stellen. Aber ein Paar Anmerkungen wollen wir noch über die Vereinigung entgegen gesetzter Grössen machen. Daß man durch die Vereinigung entgegen gesetzter Grössen eine Grösse aus verschiedenen andern finde, die diesen andern zusammen genommen gleich ist, ist offenbar. 25 Rthlr. Vermögen z. B. ist so gut, als 75 Rthlr. Vermögen und 50 Rthlr. Schuld. Allein ist die Vereinigung entgegen gesetzter Grössen auch Addition?

S. Nein, sondern bald Addition und Subtraction.

L. Wenigstens, wenn das Wort entgegen gesetzte Grössen in seiner wahren Bedeutung gebraucht wird. Denn daß Grössen eins von den

Zeichen + und — vor sich haben, macht sie noch nicht zu entgegen gesetzten Grössen, sondern man hat gleichwohl nicht entgegen gesetzte Grössen, wenn nur alle entweder mit + oder alle mit — bezeichnet sind, und nach der Bedeutung dieser Zeichen gedacht werden sollen. Nur dann finden entgegen gesetzte Grössen statt, wenn unter denen, welche man zusammen untersucht, einige positiv und einige negativ sind, und wenn man dann Eine Grösse statt mehrerer gegebenen finden soll, die diesen allen gleich ist, dann nur ist die Vereinigung anzuwenden, und also sowohl zu addiren als zu subtrahiren. So lange alle in Eine ihnen gleiche zu verwandelnde Grössen einerley Zeichen haben, so gehören die Aufgaben in die Addition. — Nun noch eine Frage. So oft man addirt, so ist die Summe, welche man findet, allezeit grösser, als jede von den gegebenen oder summirenden Grössen oder Zahlen; findet solches auch bey der Vereinigung entgegen gesetzter Grössen statt?

S. Nein, da kann die Summe kleiner als verschiedene von den gegebenen Grössen oder Zahlen seyn.

L. Wenn jemand eben so viel schuldig ist, als er besitzt, wie viel hat er dann eigentlich?

S. Gar nichts.

L. Also kann bey der Vereinigung entgegen gesetzter Grössen die Summe auch wohl 0 seyn?

S.

S. O ja, wenn nemlich die eine Art dieser Grössen eben so viel beträgt, als die andere, denn das bringt schon der Begriff entgegen gesetzter Grössen mit sich, daß sie alsdann zusammen genommen nichts oder 0 geben.

L. Vereinigen Sie folgende Grössen:

$$\begin{array}{rrrr} 3a & +\ 5b & -\ 6c & -\ 2d \\ 7a & -\ 13b & +\ 7c & -\ 3d \\ -\ 14a & -\ 3b & +\ 3c & +\ 17d \\ 19a & -\ 8b & -\ 2c & -\ 8d \\ -\ 5a & +\ 19b & +\ 2c & -\ 4d \\ \hline \end{array}$$

S. $10a \qquad +4c$

L. Hier haben Sie weder b noch d in der Summe. Vereinigen Sie noch folgende Grössen

$$\begin{array}{rrr} -\ 9a^3 & -\ 5\sqrt{b} & +\ 3c \\ 27a^3 & +\ 7\sqrt{b} & -\ 6c \\ -\ 8a^3 & +\ 12\sqrt{b} & -\ 9c \\ -\ 10a^3 & -\ 14\sqrt{b} & +\ 12c \\ \hline \end{array}$$

S. Hier ist 0 die Summe.

L. So viel von der Vereinigung entgegen gesetzter Grössen, die, wie Sie empfunden haben, mit ganz und gar keinen Schwierigkeiten verbunden ist, und welche ein jeder bey wirklichen Fällen im gemeinen Leben ohne Anstand richtig ausübet. Wer würde, um noch ein anderes Beyspiel anzuführen, wohl folgende Fragen schwer halten:

L. Um wie viel Schritte sind ferner zwey Personen von einander entfernt, die beyde an einem Orte gestanden haben, und wovon darauf der eine 500 Schritte nach Morgen und der andere um 600 Schritte nach Abend sich entfernt hat?

S. Um 1100 Schritte.

L. Wie so?

S. Wenn beyde von dem Orte, wo sie gestanden, sich so weit, als Sie gesagt, entfernt haben, so ist der eine von diesem Orte 500 und der andere 600, beyde aber von einander um 500 und 600 oder um 1100 Schritte entfernt, denn der Ort, wo sie gestanden, liegt nun zwischen ihnen, und von dem einen zu dem andern zu kommen, muß man über diesen Ort hinaus und beyde von ihnen gegangenen Wege gehen.

L. Um also hier den Unterschied zu finden, was thun Sie?

S. Ich addire die beyden Grössen, zwischen welchen ich den Unterschied finden soll.

L. Allein nun muß ich noch etwas bestimmter fragen als vorhin, nemlich so: Um wie viel ist derjenige, der 9 Rthlr. schuldig ist, von demjenigen, der 18 Rthlr. hat, unterschieden?

S. Um 27 Rthlr. Vermögen, denn er müßte 27 Rthlr. bekommen, wenn er so viel haben sollte, als der andere.

L. Und um wie viel ist der, der 18 Rthlr. hat, von dem, der 9 Rthlr. schuldig ist, unterschieden?

S.

S. Um 27 Rthlr. Schuld, denn wenn er 9 Rthlr. schuldig seyn wollte, so müßte er erst 27 Rthlr. ausgeben.

L. Das Zeichen + zeige nun wieder das Vermögen, und — die Schuld an, und die unten gesetzte Grösse sey diejenige, von welcher man bey der Bestimmung des Unterschiedes ausgeht, so ist die Differenz von + 18 Rthlr.
— 9 Rthlr.?

S. + 27 Rthlr.

L. Und die Differenz von
— 9 Rthlr.
+ 18 Rthlr.?

S. — 27 Rthlr.

L. Ferner zeige + die Schritte nach Morgen und — die Schritte nach Abend an, so ist die Differenz von + 500 Schr.
— 600 Schr.

S. + 1100 Schr.

L. Die Differenz von
— 600 Schr.
+ 500 Schr.

S. — 1100 Schr.

L. Nach diesen Beyspielen die Regeln zu bestimmen, welche bey der Bestimmung des Unterschiedes entgegen gesetzter Grössen oder Zahlen zu beobachten sind, so wären dieselben?

S. Hier fehlt es mir an Grössen, womit ich —2b und +3c vergleichen könnte; und ich weiß mir also da nicht zu helfen.

L. Es begegnet Ihnen hier wieder, was Ihnen neulich wiederfuhr, daß Sie nemlich eine Regel, die Sie schon kennen, deswegen nicht anzuwenden wissen, weil der Fall, worauf Sie dieselbe anwenden sollen, von den betrachteten in einigen ausserwesentlichen Dingen verschieden ist. Um wie viel ist denn der, der 3 Rthlr. hat, von dem, der nichts hat, unterschieden?

S. Um 3 Rthlr. Schuld, denn er müßte auch 3 Rthlr. schuldig seyn, wenn er bey 3 Rthlr., die er hat, dem andern gleich seyn sollte.

L. Und um wie viel ist der, der 2 Rthlr. schuldig ist, von dem der nichts hat, unterschieden?

S. Um 2 Rthlr. Vermögen, denn so viel müßte er nebst seinen 2 Rthlr. Schuld haben, wenn er dem, der nichts hat, gleich seyn sollte.

L. Also ist der Unterschied zwischen

$$\frac{\begin{array}{c}0\\ +3\text{ Rthlr.?}\end{array}}{}$$

S. —3 Rthlr.

L. Und zwischen

$$\begin{array}{c}0\\ -3\text{ Rthlr.?}\end{array}$$

S. +3 Rthlr.

L.

L. Also der Unterschied zwischen

$$\frac{\begin{array}{c}0\\ +3c?\end{array}}{}$$

S. $-3c.$

L. Und zwischen

$$\frac{\begin{array}{c}0\\ -2b?\end{array}}{}$$

S. $+2b.$ Nun weiß ich auch den Unterschied zwischen

$$\frac{\begin{array}{c}-6a\\ +3a-2b+3c\end{array}}{}$$

er ist $-9a+2b-3c.$

L. Ihre Regel zur Bestimmung des Unterschiedes zweyer entgegen gesetzten Grössen war: Man addirt beyde und benennt das, was man findet, nach derjenigen, mit welcher man die andere verglichen hat. Wenn Sie diese Regel, so weit wenigstens als Sie deutlich sehen, daß sie angewandt werden kann, angewandt hätten, so hätten Sie wenigstens

$$-9a \quad 2b \quad 3c$$

herausgebracht, und wären nur in Ansehung der vor 2b und 3c zu setzenden Zeichen in Ungewisheit gewesen. Diese hätten Sie dadurch wegbringen können, wenn Sie bedacht hätten, daß das Zeichen der Grösse, womit man hier vergleicht, immer das entgegen stehende des Zeichens der damit zu ver-

vergleichenden Grösse ist. Wenn Sie dies überlegen, und Sich merken, so können Sie die vorhin wiederholte Regel nun auch leicht noch anders ausdrucken. Wie meinen Sie wohl?

S. Um den Unterschied zweyer entgegen gesetzten Grössen zu finden, addirt man beyde Grössen, und benennt das gefundene so, daß es der verglichenen Grösse entgegen steht.

L. Was daraus für die Zeichen + und — folge, sehen Sie ohnstreitig ohne mein Erinnern ein. Allein es frägt sich, ob es wohl gut sey, die bey der Bestimmung des Unterschiedes zweyer entgegen gesetzten Grössen nöthige Regel auch auf diese letzte Art sich zu merken?

S. Leichter ist es wenigstens, Exempel, wie das letzte war, darnach auszurechnen, und man kann sich darnach bey den vorhergehenden Exempeln auch eben so gut richten, als wenn man sie so sich gemerkt hat, wie wir sie zuerst ausgedruckt haben.

L. Jetzt noch ein Paar Worte zum bessern Verständniß der Beschaffenheiten entgegen gesetzter Grössen überhaupt, und des vorhin gedachten Grundes insbesondere. Stellen Sie Sich vor, daß jemand 9 Rthlr. schuldig wäre, und einzeln in Thalern 27 Rthlr. einnähme, und so oft er einen Thaler erhielte, einen Thaler Schuld abtrüge, was würde er auf diese Art nach und nach haben?

Drucken

Drucken Sie Schuld mit — und Vermögen durch + aus.

S. Er hätte nach und nach, was hier steht: —9 Rthlr., —8 Rthlr., —7 Rthlr., —6 Rthlr., —5 Rthlr., —4 Rthlr., —3 Rthlr., —2 Rthlr., —1 Rthlr., 0, +1 Rthlr., +2 Rthlr., +3 Rthlr., +4 Rthlr., +5 Rthlr., +6 Rthlr., +7 Rthlr., +8 Rthlr., +9 Rthlr., +10 Rthlr., +11 Rthlr., +12 Rthlr., +13 Rthlr., +14 Rthlr., +15 Rthlr., +16 Rthlr., +17 Rthlr., +18 Rthlr.

L. Und wenn jemand, der von einem Orte 9 Schritte entfernt wäre, zu einem der jenseits 8 Schritte von diesem Orte entfernt stünde, gehen wollte, so würde, wo er nach jedem Schritte stünde, wenn + und — wieder gebraucht würden, ausgedruckt werden können?

S. So: +9 Schr., +8 Schr., +7 Schr., +6 Schr., +5 Schr., +4 Schr., +3 Schr., +2 Schr., +1 Schr., 0, —1 Schr., —2 Schr., —3 Schr., —4 Schr., —5 Schr., —6 Schr., —7 Schr., —8 Schr.

L. Nun gehen Sie von irgend einem Gliede dieser Reihen noch irgend einem der ihm entgegen gesetzten fort, z. B.

von — 9 Rthlr. zu + 18 Rthlr., oder
von — 6 Rthlr. zu + 13 Rthlr., oder
von + 9 Schr. zu — 8 Schr., oder

von

von + 5 Schr. zu — 3 Schr.; oder in umgekehrter Ordnung.
von + 18 Rthlr. zu — 9 Rthlr., oder
von + 13 Rthlr. zu — 6 Rthlr., oder
von — 8 Schr. zu + 9 Schr., oder
von — 3 Schr. zu + 5 Schr.; müssen Sie nicht jederzeit durch o gehen?

S. Allerdings, ohnedem ist es nicht möglich, daß ich zu dem entgegen gesetzten komme.

L. Und wenn Sie von + ausgehen, so kommen Sie dann natürlicher Weise?

S. Zu —.

L. Und wenn Sie von — ausgehen?

S. Zu +.

L. Und der Unterschied zwischen den beyden Grössen, der, von welcher Sie ausgehen, und der, bey welcher Sie stehen bleiben, ist allezeit?

S. Die beyden Summen zwischen ihnen auf beyden Seiten der o.

L. Von der Grösse, welche man bey der Bestimmung des Unterschiedes zweyer entgegen gesetzten mit einer andern vergleicht, geht man auf eine ähnliche Art jedesmal bis zu derjenigen fort, mit welcher man sie vergleicht, und nothwendig ist es daher, daß der Unterschied mit jener von entgegen gesetzter, mit dieser aber von nicht entgegen gesetzter Art sey. Auf diese Weise wäre auch dieser Umstand in Richtigkeit gebracht; und ich kann nun die Frage aufwerfen: Ist bey der Bestimmung des

Unter-

Unterschiedes zweyer entgegen gesetzter Grössen der Unterschied kleiner als eine oder beyde von den gegebenen Grössen?

S. Nein, sondern allezeit grösser, denn die gegebenen Grössen werden ja addirt.

L. Wenn Sie so urtheilen, so darf ich auch hier hoffen, daß Sie in keinem der hieher gehörigen Fälle Schwierigkeiten finden werden. Man nennt aber die Bestimmung des Unterschiedes entgegen gesetzter Grössen, auch bisweilen Subtraction, und dann können ähnliche Vorstellungen, als diejenigen, deren ich bey der Vereinigung entgegen gesetzter Grössen gedacht habe, allerdings Schwierigkeiten verursachen. Wahrscheinlich hätten Sie auch nicht zu antworten gewußt, wenn ich gefragt hätte, was herauskäme, wenn man 9 Rthlr. Schuld von 18 Rthlr. Vermögen subtrahire? oder wenn man 18 Rthlr. Vermögen von 9 Rthlr. Schuld wegnähme? aber den Unterschied zweyer Personen in Ansehung ihres Vermögens, wenn die eine 9 Rthlr. schuldig ist und die andere 18 Rthlr. hat, haben Sie ohne Schwierigkeit bestimmt. Wenn Sie also künftig die Bestimmung des Unterschiedes zweyer entgegen gesetzten Grössen mit dem Namen Subtraction entgegen gesetzter Grössen belegt hören oder lesen, so lassen Sie Sich dadurch nicht irre machen, sondern setzen Sie dafür in Gedanken Bestimmung des Unterschiedes. — Nun noch folgendes Exempel

$$\begin{array}{l} 16a^3 - 31b^2 + 17c + 18d - 39e \\ -\ 8a^3 - 14b^2 - 18c + 36d + 14e \end{array}$$

S. Hier kommt Subtraction und Bestimmung des Unterschiedes entgegen gesetzter Grössen zugleich vor. Bey

$$\begin{array}{l} 16a^3 + 17c - 39e \\ -\ 8a^3 - 18c + 14e \end{array}$$

muß man die Regeln der Bestimmung des Unterschiedes entgegengesetzter Grössen, bey

$$\begin{array}{l} -31b^2 + 18d \\ -14b^2 + 36d \end{array}$$

aber die Regeln der Subtraction anwenden.

L. Also wird die Differenz seyn?

S. $24a^3 - 17b^2 + 35c - 18d - 53e$.

L. Je weiter wir kommen, desto öfter werden wir die erlernten Rechnungsarten in Verbindung anbringen müssen, und es wird auch selbst diese Verbindung desto mannigfaltiger werden. Was für eine anzubringen sey, muß und kann dann jedesmal aus den gegebenen Dingen bestimmt werden, und diese muß man daher zuvor immer sorgfältig überlegen. Wenn Sie das jedesmal so thun werden, als Sie es hier gethan haben, so werden Sie vieles von selbst finden, was andern erst weitläuftig gezeigt werden muß. In folgendem Exempel

$$\begin{array}{l} 6a+3b-2c-8d \\ 7a-2b-3c+7d \\ 3a+6b-5c+3d \\ 8a-2b-6c+4d \\ \hline \end{array}$$

sind auch wieder zweyerley Fälle, wenn alle diese Grössen in Eine ihnen gleiche verwandelt werden sollen; nemlich:

S. Die erste und dritte Reihe wird nach den Regeln der Addition, und die zweyte und vierte nach den Regeln der Vereinigung entgegen gesetzter Grössen behandelt.

L. Und die ganze Summe also ist.

S. $24a+5b-16c+6d$.

L. Vergessen Sie nun nicht, auch dieses zu überdenken. Jetzt gebe ich Ihnen keine Exempel zur Uebung für Sich auf, es wird sich aber in der Folge häufige Gelegenheit dazu finden, und dann werde ich sehen, ob Sie auch alles eben so gut behalten haben, als es von Ihnen gefaßt worden ist.

Zehntes Gespräch.

L. Sie wissen schon aus dem, was ich neulich sagte, daß wir nunmehr über die Multiplication uns zu unterreden haben. Da Sie bereits die

vier ersten einfachen Rechnungsarten, und also auch schon die Multiplication erlernt haben, so kann ich wohl sogleich mit der Frage anfangen, was Multipliciren heisse?

S. Multipliciren heisset vermehren.

L. Wenn ich also aus 4 Rthlr. 6 Rthlr. mache, so habe ich multiplicirt, denn ich habe ja die 4 Rthlr. vermehrt.

S. Nein so nicht; dann multiplicirt man, wenn man eine Zahl oder Grösse auf die Art vermehrt, daß man sie etliche Male nimmt, z. B. wenn man 4 Rthlr. sechsmal nähme, und also 24 Rthlr. daraus machte.

L. Also multipliciren Sie doch einmal 8 Rthl.

S. Womit denn? Sie müssen mir erst eine Zahl sagen, mit welcher ich die 8 Rthlr. multipliciren soll.

L. Also mit 6.

S. Dann kommen 48 Rthl.

L. Multipliciren Sie doch auch einmal 8 Rthl. mit 6 Rthlr.

S. Wie soll ich das anfangen? 8 Rthlr. kann ich wohl mit 6 multipliciren und so 48 Rthl. herausbringen, oder 6 Rthlr. mit 8, wo 48 Rthlr. kommen; allein 8 Rthl. mit 6 Rthl. zu multipliciren, weiß ich nicht.

L. Wie viel Dinge müssen Ihnen also gegeben seyn, wenn Sie wirklich multipliciren sollen?

S.

S. Zwey, erstlich das, was ich multipliciren, und dann die Zahl, womit ich multipliciren soll.

L. Können Sie auch 8 mit 6 multipliciren?

S. O ja, das giebt 48.

L. Also das, was Sie multipliciren sollen, kann seyn, — bloß eine Zahl?

S. Nein, sondern auch eine Grösse.

L. Eine Zahl doch aber auch?

S. Ja.

L. Aber womit Sie multipliciren sollen?

S. Das muß eine Zahl seyn.

L. Dasjenige, was man multipliciren soll, nennt man den Multiplicandus, und die Zahl, womit man multiplicirt, den Multiplicator, und das, was durch die Multiplication herausgebracht wird, das Factum. Den Multiplicandus und Multiplicator nennt man auch mit einem gemeinschaftlichen Namen Factoren, und das Factum Product; allein wir wollen fürs erste bloß jene Benennungen gebrauchen. Wenn man eine Grösse oder Zahl etliche Male nimmt, so nennt man das, was man herausbringt, auch das Vielfache von der ersten, und also wäre wohl die Multiplication nichts anders als das Finden eines bestimmten Vielfachen von einer Grösse oder Zahl? Ich will mich an einem Exempel erklären. Wenn man 8 Rthlr. mit 6 multiplicirt und 48 Rthlr. zum Factum erhält, so ist 48 Rthlr. ein Vielfaches von 8 Rthlr.,

verhalten, wenn Sie 8 Rthlr. erst mit 9, dann mit 8, 7, 6, u. s. w. multiplicirten?

S. Dann würde das Factum immer kleiner werden.

L. Und worin liegt hievon die Ursach?

S. In dem Multiplicator. Je grösser dieser wird, desto grösser wird das Factum, und je kleiner man ihn nimmt, desto kleiner wird das Factum, vorausgesetzt, daß der Multiplicandus unverändert bleibt.

L. Wenn Sie 8 Rthlr. erst mit 2, dann mit 4 und endlich mit 6 multiplicirten, was würden Sie herausbringen?

S. 16 Rthlr., 32 Rthlr., 48 Rthlr.

L. Und nun vergleichen Sie 32 Rthlr. und 48 Rthlr. mit dem ersten Factum 16 Rthlr.

S. 32 Rthlr. ist noch einmal, und 48 Rthlr. dreymal so viel als 16 Rthlr.

L. Und wie sind die Multiplicatoren 4 und 6, mit dem Multiplicator 2 verglichen, beschaffen?

S. 4 ist auch noch einmal, und 6 dreymal so groß als 2.

L. Wenn also der Multiplicandus unverändert bleibt, und der Multiplicator grösser wird; so wird

S. Auch das Factum grösser.

L. Und wenn der Multiplicator kleiner wird?

S. So wird auch das Factum kleiner.

L. Und zwar wie viele Male?

S. Gerade so viele Male, als der Multiplicator grösser oder kleiner gemacht worden ist.

L. Lassen Sie nun den Multiplicator immer gleich bleiben, den Multiplicandus aber sich verändern; wie wird sichs dann mit dem Factum verhalten? Multipliciren Sie in Gedanken 4, 6, 8, 10 u. s. w. mit 3.

S. Auch dann wird das Factum grösser, wenn der Multiplicator grösser wird, und kleiner, wenn der Multiplicator kleiner wird.

L. Und wieder, wie viele Male?

S. Gerade so viele Male, als der Multiplicator grösser oder kleiner gemacht worden ist.

L. Und wie nun, wenn man so wohl den Multiplicandus als den Multiplicator vergrösserte oder verkleinerte?

S. Dann würde das Factum zweymal vergrössert oder verkleinert werden, erst nach dem Multiplicandus, und dann nach dem Multiplicator.

L. Dies sind sehr leichte Sätze, allein wir werden Sie sehr gut gebrauchen können. Jetzt noch etwas vorläufig. Was zeigt denn wohl ein negativer Multiplicator an?

S. Das weiß ich nicht.

L. Was zeigt der Multiplicator überhaupt an?

S. Daß man von dem Multiplicandus das Vielfache machen soll.

L. Und wenn sowohl der Multiplicandus als der Multiplicator einerley Zeichen haben, so ist solches?

S. Entweder + oder —.

L. Mit andern Worten kann dies auch so ausgedruckt werden: Beyde sind entweder positiv oder negativ.

L. Und wenn der Multiplicandus und Multiplicator verschiedene Zeichen haben?

S. So hat entweder der Multiplicandus + und der Multiplicator —, oder der Multiplicandus — und der Multiplicator +.

L. Auch dies kann man auf eine der oben angeführten ähnliche Art so ausdrucken: Entweder ist der Multiplicandus positiv und der Multiplicator negativ, oder es ist der Multiplicandus negativ und der Multiplicator positiv. Sollte es in Ansehung der Zeichen wohl mehrere als diese Fälle geben können?

S. (Nach einigem Nachdenken). Nein. Denn erstlich giebt es ausserdem, daß der Multiplicandus und Multiplicator entweder einerley oder verschiedene Zeichen haben, keinen dritten Fall. Wenn ferner der Multiplicandus und Multiplicator einerley Zeichen haben, so läßt sich auch weiter nichts gedenken, als daß diese Zeichen entweder + oder — sind. Haben endlich beyde Grössen verschiedene Zeichen, so kann der Multiplicandus entweder positiv oder negativ seyn; und ist jenes, so

muß,

muß, da die Zeichen verschieden seyn sollen, der Multiplicator negativ, ist aber dieses, so muß der Multiplicator positiv seyn, ein anderer Fall ist nicht mehr möglich.

L. Wie ist denn nun, nach der vorhergehenden Tabelle, deren Richtigkeit uns bekannt ist, zu urtheilen, das Factum in jedem der angeführten Fälle beschaffen?

S. (Nach zuvor angestellter Ueberlegung). Wenn der Multiplicandus und Multiplicator einerley Zeichen haben, so ist das Factum positiv; haben aber der Multiplicandus und Multiplicator verschiedene Zeichen, so ist das Factum negativ.

L. Also geben einerley Zeichen im Multiplicandus und Multiplicator für das Factum?

S. +.

L. Und verschiedene Zeichen?

S. —.

L. Schwer ist doch wohl die Regel nicht zu behalten? Wenn man entgegen gesetzte Grössen und Zahlen mit einander multiplicirt, so geben einerley Zeichen für das Factum +, verschiedene aber —. Aber der Grund davon? Werden Sie den eben so leicht angeben können, als Sie nun diese Regel anzuführen im Stande sind?

S. Der Grund davon ist ja auch nicht schwer, wenn man nur die hier möglichen Fälle einzeln oder nach einander betrachtet. Denn wenn einerley Zeichen da sind, so muß, wenn solches + ist,

ist, von dem Multiplicandus selbst das Vielfache gesucht werden, und da derselbe alsdann das Zeichen + hat, oder positiv ist, so muß auch das Factum das Zeichen + haben oder positiv seyn; ist aber das Zeichen des Multiplicandus und des Multiplicators —, so muß von dem Gegentheile des Multiplicandus das Vielfache gesucht werden, also das Vielfache von dem Gegentheile einer negativen Grösse, welches positiv seyn muß. Sind ferner die Zeichen des Multiplicandus und des Multiplicators verschieden, und erstlich das Zeichen des Multiplicandus +, so muß, da alsdann das Zeichen des Multiplicators — ist, das Vielfache von dem Gegentheile des Multiplicandus genommen werden, welches denn eine negative Grösse wird; ist aber das Zeichen des Multiplicandus —, so muß, da alsdann das Zeichen des Multiplicators + ist, das Vielfache von dem Multiplicandus selbst genommen werden, und also nothwendiger Weise ein negatives Factum herauskommen.

L. Hat die Verschiedenheit der Zeichen, die nach dem vorhergehenden allerdings die Art des Factums bestimmt, auch auf die Grösse desselben einen Einfluß?

S. Nein, denn diese Grösse hängt bloß von der Grösse des Multiplicandus und des Multiplicators ab, und darin wird durch die Zeichen nichts geändert.

L. Da dies ist, so ist die Multiplication entgegen gesetzter Grössen nicht schwer, wenn man dabey nur theilweise verfährt, und einmal auf die gegebenen Grössen oder Zahlen sieht, und dann die Zeichen des Multiplicandus und des Multiplicators betrachtet. Wie man sich in Ansehung des erstgedachten zu verhalten habe, ist Ihnen theils schon bekannt, theils werden Sie es noch lernen; in Ansehung der Zeichen aber richten Sie sich nur immer nach folgender Regel: Haben der Multiplicandus und Multiplicator einerley Zeichen, so ist das Factum positiv, und erhält also das Zeichen +; haben sie aber verschiedene Zeichen, so ist das Factum negativ, und bekommt das Zeichen —. Nach diesen Bemerkungen wollen wir nun die verschiedenen Fälle, die bey der Multiplication vorkommen können, betrachten, und zuvörderst die Multiplication unserer gewöhnlichen Zahlen vornehmen. Haben Sie das Einmaleins gelernt? *)

S. Ja.

L.

*) Ohne das sogenannte Einmaleins in der größten Fertigkeit inne zu haben, ist schlechterdings die Fertigkeit, die man in der Multiplication sich zu erwerben suchen muß, eine unmögliche Sache. Wie soll man sich also dasselbe in der möglich größten Fertigkeit bekannt machen? Derjenige, mit dem in der Addition die Uebungen angestellt sind, welche S. 45—48 beschrieben worden, wird sich, ehe er an die Multiplication kommt, bereits

L. Dann brauche ich von der Multiplication in solchen Fällen, wenn der Multiplicandus und der Multiplicator eintheilige Zahlen von der Ordnung o sind, nicht zu reden, sondern ich kann gleich zu solchen Exempeln fortgehen, in welchen der Multiplicandus und der Multiplicator zwar eintheilige Zahlen, aber Zahlen von einer höhern oder niedern Ordnung sind. Alles, was hiebey fürs erste zu merken ist, werden Sie sich sehr leicht von einigen besondern Fällen ableiten, vorausgesetzt, daß Sie die Factums ähnlicher Multiplicanden und Multiplicatoren gehörig unter einander

reits eine ziemliche Kenntniß davon erworben haben, so daß es für diesen genug seyn kann, die Uebungen, wovon sogleich gesprochen werden soll, fleißig zu treiben. Wer nicht auf die gedachte Art in der Addition geführt ist, der muß vor allen Dingen durch die Addition der eintheiligen Zahlen auf eine sinnliche Art von der Richtigkeit des Einmaleins überzeugt werden, und dann kann er sich allenfalls durch das Auswendiglernen zu Hülfe kommen. Ist man im Stande jedes Factum aus zwey eintheiligen Zahlen von der Ordnung o zu finden, so ist eine häufige Beschäftigung mit Multiplicationsexempeln, zumal wenn man dabey darauf sieht, daß man immer geschwinder und geschwinder das Factum finde, eine sehr nothwendige Sache, und deswegen fleissig zu treiben. Soll jemand, der schon Uebung im Denken gehabt hat, das Einmaleins lernen, denn manches Kind wird doch nicht so früh, als es möglich ist, damit bekannt gemacht, so ist es ausserdem noch nothwendig, daß man bey dem Einmaleins suche, ausser dem Gedächtnisse zugleich seinen Verstand zu beschäftigen. Es kann solches unter andern durch Vergleichungen geschehen, z.E. wenn man 7×9 mit $7 \times (10-1)$ vergleicht, und dieses anstatt jenes nimmt.

ander vergleichen. Was giebt also 8 mit 9 multiplicirt?

S. 72.

L. Aber 80 mit 9 multiplicirt?

S. 720.

L. Und das Factum aus 8 mit 90?

S. Ist auch 720.

L. Endlich das Factum aus 80 mit 90?

S. Ist 7200.

L. Wie unterscheiden sich die herausgebrachten Factums von einander?

S. Das zweyte und dritte ist zehnmal, und das vierte hundertmal grösser als das erste.

L. Woher das?

S. Weil in dem zweyten und dritten Falle entweder der Multiplicandus oder der Multiplicator zehnmal grösser angenommen wurde; in dem vierten aber sind beyde zehnmal so groß als in dem ersten, und das Factum wächst, wenn entweder der Multiplicandus oder der Multiplicator wächst, so wie es auch mit denselben abnimmt.

L. Sind also die Zifern in den gedachten Factums verschieden, und können sie es seyn?

S. Nein, sondern nur die Ordnung derselben ist verschieden. Jedes Factum ist 72, aber diese 72 gehören im ersten Falle zu der Ordnung o, im zweyten und dritten zu der ersten höhern Ordnung, im dritten zu der zweyten höhern Ordnung.

L. Wie viel Nullen werden also an das Factum der Zifern gehängt, wenn der Multiplicandus und der Multiplicator dergleichen haben?

S. So viel, als der Multiplicator und der Multiplicandus zugleich haben.

L. Bis jetzt haben wir Beyspiele von Zifern der höhern Ordnung gehabt. Ueberlegen Sie doch einmal folgendes, und sagen Sie mir, ob alles richtig sey?

$7 \times 9 = 63$
$0,7 \times 9 = 6,3$
$0,07 \times 9 = 0,63$
$0,007 \times 9 = 0,063$
$0,0007 \times 9 = 0,0063$
$0,00007 \times 9 = 0,00063$

$7 \times 9 = 63$
$7 \times 0,9 = 6,3$
$7 \times 0,09 = 0,63$
$7 \times 0,009 = 0,063$
$7 \times 0,0009 = 0,0063$
$7 \times 0,00009 = 0,00063$

$7 \times 9 = 63$
$0,7 \times 0,9 = 0,63$
$0,7 \times 0,09 = 0,063$
$0,07 \times 0,09 = 0,0063$
$0,007 \times 0,009 = 0,000063$
$0,0007 \times 0,009 = 0,0000063$
$0,0007 \times 0,0009 = 0,00000063$
$0,0007 \times 0,00009 = 0,000000063$
$0,00007 \times 0,00009 = 0,0000000063$.

S. Diese Factums sind alle richtig, denn wenn man die Zahlen 7 und 9 als Einer betrachtet, und ihr Factum 63 sucht, so ist ein jedes von den übrigen Factums so vielmal so klein wie dieses Factum 63, als sein Multiplicandus und Multiplicator gegen 7 und 9 gehalten, es sind. So ist z. B. 0,7x9=6,3 richtig; denn wenn man anstatt 7x9 dieses 0,7x9 setzt, so hat man den Multiplicandus oder den Multiplicator, denn die 7 kann hier so wohl das eine als das andere seyn, zehnmal kleiner angenommen, und folglich muß das Factum auch zehnmal kleiner werden, und 6,3 ist nur der zehnte Theil von 63. Auf eine ähnliche Art habe ich alle übrige Fälle, wo eine der gegebenen Zahlen verändert werden, durchgedacht; bey den übrigen schliesse ich so. Es ist 0,07x0,09=0,0063. Denn 7x9 ist 63. Wenn aber 0,07 anstatt 7 und 0,09 anstatt 9 genommen wird, so muß das Factum 63 erst hundert, und dann noch

hundertmal kleiner werden, und der hundertste Theil von 63 ist 0,63, und der hundertste Theil von 0,63 ist 0,0063.

L. Wenn man also Zahlen von den niedern Ordnungen mit einander zu multipliciren hat, so hat man dabey auch zuerst auf die Zifern, und dann auf ihre Ordnung zu sehen, und aus den Ordnungen der gegebenen Zahlen die Ordnung des Factums eben so zu bestimmen, daß dieselbe so groß wird, als beyde Ordnungen der gegebenen Zahlen zusammen genommen. Gehört daher der Multiplicandus zu der 3ten und der Multiplicator zu der 2ten niedern Ordnung, so gehört das Factum?

S. Zu der 5ter niedern Ordnung.

L. Und die niedern Ordnungen jedesmal richtig zu bezeichnen, kommt es nun nur darauf an, daß man das Comma gehörig setze. Soll dasselbe ordentlich stehen, so müssen nach demselben so viel Stellen angefüllt seyn, als die Zahl der Ordnung es anzeigt. So müssen z. B. 3 Stellen nach dem Comma ausgefüllt seyn, wenn die dritte niedere Ordnung da ist, und 4, wenn die vierte niedere Ordnung da ist u. s. w. Wenn man sich dieses merkt, so kann man bey der Multiplication der Zehntheiler sich auf die Art helfen, daß man zuvörderst das Factum der Zifern sucht, als wenn dieselben Einer wären, und dann in dem Factum so viel Zifern durch das Comma zur Rechten absondert, als in dem Multiplicandus und Multiplicator Zehntheiler

theiler sind. Und z. B. 0,007 mit 0,0009 zu multipliciren, darf man nur sagen 7x9 ist 63, und dann 7 Stellen durch die Setzung des Comma und Ausfüllung der Stellen, wo keine Zifern sind, mit 0, für die Zehntheiler abschneiden, weil in dem Multiplicandus 3 und in dem Multiplicator 4 und also in beyden 7 Zehntheilerstellen sind. Folglich ist

$$0{,}007 \times 0{,}0009 = 0{,}0000063.$$

S. So ist es sehr leicht, Zahlen der niedern Ordnung, wenn sie eintheilig sind, mit einander zu multipliciren; aber wenn sie vieltheilig sind, so ist die Multiplication derselben wohl schwerer?

L. Noch ist es nicht Zeit davon zu reden, denn wir müssen nun auch noch den Fall betrachten, wenn eintheilige Zahlen von höhern und niedern Ordnungen mit einander zu multipliciren sind. Uebrigens wird Ihnen die Multiplication mehrtheiliger Zehntheiler, sobald Sie die Regeln derselben kennen gelernt haben werden, nicht schwerer seyn, als das bisherige Ihnen gewesen ist. Um zu dem, was uns jetzt noch übrig ist, zu kommen, so versuchen Sie zu beurtheilen, ob folgende Factums richtig sind.

8x9=72
0,8x90=72
0,8x900=720
0,008x90=0,72
800x0,9=720.

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja. Denn wenn 8x9=72 ist, so ist
0,8x9=7,2 und
0,8x90=72. Durch die Veränderung der 8 in 0, 8, wird das Factum zehnmal kleiner, durch die Veränderung der 9 in 90 aber wieder zehnmal grösser, und bleibt also 72. Ferner ist auch 0,8x900=720. Denn
8x900=7200, und
0,8x900=720, der zehnte Theil von 7200, indem durch die Weglassung der 0 am Ende die Zahl 7200 zehnmal kleiner wird. Auch ist
0,008x90=0,72. Denn
0,008x9=0,072 und
0,008x90=0,72, weil durch die Verwandlung der 9 in 90 das Factum zehnmal grösser werden muß, und das wird es, wenn das Comma in 0,072 um eine Stelle weiter zur Rechten geruckt, nnd also 0,072 in 0,72 verwandelt wird. Endlich ist auch
800x0,9=720. Denn
800x9=7200 und also
800x0,9=720, aus dem vorhin schon angeführten Grunde.

L.

L. Auf diese Art sind Sie allerdings im Stande dergleichen Factums zu beurtheilen, allein mühsamer ist diese Beurtheilung doch, als daß man dabey stehen bleiben dürfe, indem es bey dem Rechnen eben so sehr auf Schnelligkeit als auf Richtigkeit ankommt. Lassen Sie uns also die untersuchten Factums noch auf eine andere Art betrachten. Was für Ordnungen haben Sie mit einander multiplicirt?

S. Zuerst die 1te niedere und 1te höhere
dann die 1te niedere und 2te höhere
ferner die 3te niedere und 1te höhere und
endlich die 2te höhere und 1te niedere Ordnung.

L. Und zu was für einer Ordnung gehörte die letzte Zifer des Factums jedesmal?

S. Im ersten Falle zur Ordnung 0
im zweyten Falle zur 1ten höhern
im dritten Falle zur 2ten niedern und
im vierten Falle zur 1ten höhern Ordnung.

L. Wie könnte man wohl diese Ordnung der letzten Zifer des Factums jedesmal aus den Ordnungen der gegebenen Zahl herausbringen?

S. (Nachdem er eine Zeitlang über die vorstehenden Fälle nachgedacht.) Durch die Subtraction der kleinern Ordnung von der grössern. Die 1te höhere Ordnung mit der 1ten niedern multiplicirt

 giebt

chen, wie groß das achtfache von 365 wäre; so würden Sie aufsetzen

$$\begin{array}{r} 365 \\ 365 \\ 365 \\ 365 \\ 365 \\ 365 \\ 365 \\ 365 \\ \hline \end{array}$$

, und durch die Addition 2920 finden. Wer multipliciren gelernt hat, setzt hin

$$\begin{array}{r} 365 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

und findet daraus das Factum 2920. Ob also 365 achtmal unter einander gesetzt und zu sich selbst addirt wird, oder ob man multiplicirt, das ist in Ansehung dessen, was herausgebracht wird, einerley. Auch findet übrigens nur der Unterschied statt, daß man bey der Addition vieles hinschreibt, was man sich bey der Multiplication nur gedenkt. Bey dem angeführten Exempel addirt man erst die 5, dann die 60, dann die 300 achtmal zu sich selbst, wenn man nemlich durch die Addition das Factum sucht; sucht man es durch die Multiplication, so nimmt man erst die 5, dann die 60, dann die 300 achtmal, und was thut man also anders, als daß man auf eine verkürzte Art multiplicirt? Die Verkür-

zung besteht darin, daß man einmal durch den Multiplicator sich vorstellt, wie oft eine Zahl zu sich selbst zu addiren sey, und dann daß man das Vielfache vermittelst des Einmaleins schnell findet. Dies vorausgesetzt, so wollen wir nun die Multiplication vieltheiliger Zahlen genauer betrachten, und zwar erstlich den Fall, wenn von dem Multiplicandus und dem Multiplicator einer vieltheilig, der andere eintheilig ist. Multipliciren Sie 8643 mit 8.

S. Dann schreibe ich hin

8643
8 und

finde 69144, indem ich sage: $8 \times 3 = 24$, 4 hin 2 im Sinn; $8 \times 4 = 32$, und $32 + 2 = 34$, 4 hin 3 im Sinn; $8 \times 6 = 48$ und $48 + 3 = 51$, 1 hin 5 im Sinn; $8 \times 8 = 64$ und $64 + 5 = 69$.

L. Multipliciren Sie hier mit einem Male den Multiplicandus, oder nehmen Sie einen Theil desselben nach dem andern?

S. Ich nehme einen Theil nach dem andern.

L. Aber die Factums, die Sie auf diese Art erhalten — Lassen Sie dieselben so einzeln, als Sie sie finden, oder addiren Sie dieselben zu einer Summe?

S. Ich addire sie.

```
964357932
        9
---------
       18
      27
     81
    63
   45
  27
 36
54
81
---------
8679221388.
```

8679221388. Allein wie viel Platz gehörte gleichwohl nicht noch dazu, und doch ist dies nur ein mittelmäßig großes Exempel. — In dem Exempel 8643x8=69144 war 8643 der Multiplicandus und 8 der Multiplicator; wie wenn Sie nun 8 mit 8643 multipliciren sollten, so, daß 8643 der Multiplicator wäre?

S. Dann setze ich

```
   8
8643  und finde
```

das Factum 69144, indem ich sage: 3x8=24, 4 hin und 2 im Sinn; 4x8=32, und 32+2=34, 4 hin 3 im Sinn; 6x8=48, und 48+3=57, 1 hin 5 im Sinn; 8x8=64 und 64+5 ist 69.

L. Also ist wohl kein Unterschied darunter, was für eine von den gegebenen Zahlen zum Mul-

Multiplicandus oder zum Multiplicator genommen wird?

S. Nein, in den angeführten Exempeln erhält man so wohl, wenn 8643 der Multiplicandus, als wenn es der Multiplicator ist, zum Factum 69144.

L. Hievon werden Sie Sich noch mehr überzeugen, wenn Sie das Factum durch die Addition suchen. Dann setzen Sie im ersten Falle

8643
8643
8643
8643
8643
8643
8643
8643 und finden durch die Addition:
69144

indem Sie erst die 3, dann die 4, dann die 6, dann die 8 achtmal zu sich selbst addiren. Wollten Sie auf eine ähnliche Art 8, 8643 mal zu sich selbst addiren; so gienge das auf eine doppelte Art an. Entweder sie setzten die 8, 8643 mal unter einander, und addirten mit einem Male, oder Sie addirten die 8, erst 8000 mal, dann 600 mal, dann 40 mal, dann 3 mal, und nähmen diese Summen am Ende zusammen. In diesem letzten Falle verführen Sie also eben so, wenn Sie 8643 als den Multiplicator betrachten,

als Sie verfahren haben würden, wenn Sie diese Zahl als den Multiplicandus angesehen hätten. Und nun also die Regel für die Multiplication solcher Zahlen, wovon die eine eine vieltheilige und die andere eine eintheilige ist?

S. Man multiplicirt nach und nach alle Theile der vieltheiligen Zahl mit der andern, und addirt die herausgebrachten Factums zu einander.

L. Bey was für Theilen fängt man denn wohl die Multiplication an?

S. Bey den Theilen der niedrigsten Ordnung.

L. Bey der niedrigsten Ordnung haben Sie vorhin, indem Sie rechneten, allerdings angefangen, allein ist dies allezeit die beste Art?

S. Ist es etwa hier auch so als bey der Addition und Subtraction?

L. Ueberlegen Sie es. Multipliciren Sie einmal 536 mit 6, aber ohne dies Exempel aufzuschreiben.

S. (Nach einiger Zeit.) Mir scheint es wirklich leichter zu seyn, wenn man von der Linken, oder den Zahlen der höhern Ordnung anfängt. Indem ich das hier thue, so denke ich mir nach und nach 3000, 180 und 36, und also zusammen 3216.

L. Und gleichwohl sind Sie darin noch nicht einmal geübt. Versuchen Sie es, und schreiben

Sie

Sie Sich oft Exempel wie folgende, aber in grosser Menge auf:

36,	84,	39,	72,	93,	86,	72,	56,	32,	98
3,	6,	4,	5,	9,	3,	8,	9,	3,	6

46,	85,	36,	47,	25,	37,	69,	73,	87,	95
9,	7,	3,	6,	5,	4,	7,	8,	3,	9

und suchen Sie darauf die Factums so geschwind hinzuschreiben, als Sie es bey ähnlichen Uebungen in der Addition und Subtraction mit den Summen und Differenzen thun mußten. Wenn Sie die Multiplication von der Linken anfangen, so ist das auch aus der Ursache leichter, weil Sie alsdann stets von der Linken zur Rechten zu schreiben haben. Ein Blick auf die folgende Zahl des Multiplicandus zeigt auch bald, wie viel man zu dem vorhergehenden Factum nehmen müsse; Zu dem Factum 9 aus 3x3 im ersten Exempel muß man z. B. 1 von den folgenden 18 aus 3x6 nehmen, und zu dem Factum 48 aus 8x6 im zweyten Exempel 2 von den folgenden 24 aus 4x6. Dergleichen Uebungen werden Ihnen nicht bloß eine grosse Fertigkeit im Multipliciren verschaffen, sondern Sie werden auch, wenn Sie stets von der Linken anfangen, dadurch lernen im Kopfe zu rechnen. Machen Sie Sich das also nicht zu einer allgemeinen Regel, daß man die Multiplication von den Zah-

len der niedrigsten Ordnung anfangen müsse, sondern behalten Sie selbige nur für die Fälle bey, wenn die Exempel von der Art sind, daß man sie nicht im Kopfe ausrechnen kann, sondern aufschreiben muß. Bey der vorgeschlagenen Uebung müssen Sie aber nicht bloß bey solchen Fällen stehen bleiben, wo die eine von den gegebenen Zahlen eine zweytheilige Zahl ist, sondern nachdem Sie Sich lange genug darin geübt haben, auch dreytheilige, ja viertheilige und fünftheilige Zahlen nehmen. — Wie würden Sie es nun wohl machen, wenn Sie das Factum aus 8263 und 526 suchen sollten, und zwar so, daß Sie 8263, 526 mal zu sich selbst addirten?

S. Denn müßte ich 8263 zuvörderst 526 mal unter einander setzen, und dann nehme ich nach und nach

$$\left.\begin{array}{r}3\\60\\200\\8000\end{array}\right\}$$ 526 mal und addirte alle erhaltene Summen.

L. Wie könnten Sie Sich ferner nach der vorhin bey dem Falle, wo ein eintheiliger Multiplicator betrachtet wurde, erwähnten Art helfen, wenn Sie jede von den Zahlen 3, 60, 200, 8000, 526 nehmen wollten?

S. Ich könnte jede erst 500 mal, dann 20 mal und dann 6 mal nehmen.

L. Und was für Summen würden Sie auf diese Art nach und nach erhalten?

S. $1500=3x500$
$60=3x20$
$18=3x6$

$30000=60x500$
$1200=60x20$
$360=60x6$

$100000=200x500$
$4000=200x20$
$1200=200x6$

$4000000=8000x500$
$160000=8000x20$
$48000=8000x6.$

L. Alle diese Summen nun zusamen genommen machten denn doch das gesuchte Vielfache der Zahl 8263 aus?

S. Ja.

L. Und wie meinen Sie wohl, daß alle diese Summen beschrieben werden können, wenn man sie, so wie sie es sind, als Factums aus den Theilen des Multiplicandus und des Multiplicators betrachtet.

S. (Nachdem er das vorhergehende aufmerksam überdacht.) Es sind die Factums aus einem jeden Theile des Multiplicators in einen jeden Theil des Multiplicandus.

L. Und also besteht das Factum beyder gegebenen vieltheiligen Zahlen?

S. Aus der Summe der Factums aller Theile der einen gegebenen Zahl in alle Theile der andern.

L. Kann man das von dem Factum jeder zwey gegebenen vieltheiligen Zahlen behaupten?

S. Ja, denn man kann das Factum jeder zwey gegebenen vieltheiligen Zahlen auf eben die Art finden, als wir das Factum der Zahlen 8263 und 526 gefunden haben.

L. Und welches wäre also die Regel der Multiplication zweyer vieltheiligen Zahlen?

S. Man sucht die Factums aus einem jeden Theile des Multiplicators in einen jeden Theil des Multiplicandus, und addirt dieselben. Die Summe, welche man findet, ist das verlangte Factum.

L. Multipliciren Sie nun einmal 8263 mit 526, so wie Sie es sonst gelernt haben?

S.

```
  8263
   526
------
 49578
16526
41315
------
4346338
```

L. Worin ist diese Ausrechnung dieses Exempels von der vorhergehenden unterschieden?

S. Bloß darin, daß bey der letztern Ausrechnung die einzelen Factums sogleich zusammen gezogen sind.

L. Verursacht dies in dem ganzen Factum keinen Unterschied?

S. Nein, denn wenn auch gleich dem Scheine nach bey der Multiplication selbst nicht auf die Ordnung der Theile des Multiplicandus und des Multiplicators gesehen worden ist, so ist solches in der That doch dadurch geschehen, daß erstlich, so wie von einem Theile des Multiplicandus zu einem andern fortgegangen wurde, das Factum immer *um* eine Stelle weiter nach der Linken gesetzt worden ist, und auch ausserdem, so wie ein höherer Theil des Multiplicators genommen ward, das Factum ebenfalls eine Stelle weiter nach der Linken zu stehen gekommen ist.

L. Daß durch die gebrauchte Verkürzung kein Unterschied hervorgebracht werde, fällt bey einzelen Fällen noch mehr in die Augen, wenn man selbige auf die abgekürzte so wohl als weitläuftige Art ausgerechnet neben einander setzt, und sorgfältig mit einander vergleicht. Um solches an dem berechneten Exempel zu zeigen, so gäbe

8263	mit
526	multiplicirt,
18	an einzelen Factums und
360	
1200	
48000	
60	
1200	
4000	
160000	
1500	
30000	
100000	
4000000	
4346338	zum ganzen Factum.

Ueberdenkt man nun, wie bey der abgekürzten Ausrechnung die Zahlen, welche man nach und nach herausgebracht, gesetzt und zusammen gezogen sind, so findet man leicht, so wohl, daß in beyden Fällen jede Zahl einerley Stelle erhalten habe, als, daß hier nur verschiedene, dort zusammengezogene, Zifern einzeln stehen, und die Nullen bloß zur Ausfüllung der leeren Plätze dienen, und da also wegbleiben können, wo sie um dieser Absicht willen nicht nöthig sind. — Indem Sie auf die abgekürzte Art multiplicirten, fiengen Sie von der Rechten oder bey den kleinsten Zifern an, und zwar so wohl, indem Sie die Theile des Multiplicandus, als da Sie die Theile

Theile des Multiplicators nahmen. Sollte man nicht auch auf folgende Art rechnen können?

```
 8263
  526
-----
41315
 16526
  49578
-------
4346338
```

Ich habe hier von der höchsten Ordnung des Multiplicators angefangen, die Theile des Multiplicandus hingegen so wie vorhin genommen?

S. Wenn man dabey jede neue Reihe eben so nach der Rechten hinausrückt, als sonst nach der Linken eingerückt wird, so kann daraus kein Unterschied entstehen; denn man erhält auf diese Art dieselben Factums, und die Zahlen derselben ebenfalls nach ihren Ordnungen unter einander gesetzt, nur ist das erste das letzte und das letzte das erste, und das thut zu ihrer Summe nichts.

L. Aber vortheilhaft kann diese Art zu multipliciren seyn. Denn gesetzt daß Sie 5364 mit 16 multipliciren sollten, wie würden Sie das machen?

S. Ich multiplicirte so:

```
 5364
   16
-----
32184
5364
-----
85824
```

L. Und ich so:

```
 5364
 32184
------
 85824
```

S. Wie haben Sie denn das gemacht?

L. Daß ich mit 16 multipliciren soll, merke ich mir in Gedanken, ohne daß ich diesen Multiplicator wie gewöhnlich unter den Multiplicandus setze, und fange dann an, den Multiplicator von der Linken an zu nehmen. Da ich nun mit 1 zuerst multipliciren soll, so lasse ich den Multiplicandus stehen, und setze das Factum aus ihm und der 6 nur darunter, aber um eine Stelle weiter nach der Rechten.

S. Auf diese Art erspart man viele Zahlen, und ich werde mir daher dieselbe auch anzugewöhnen suchen.

L. In der Folge werden Sie von dieser Art die Multiplication von der Linken anzufangen, noch einen andern Vortheil lernen. Jetzt merke ich nur an, daß man einen ähnlichen Vortheil, als hier die

die Multiplication von der Linken an gewähret hat, auch alsdann haben kann, wenn man von der Rechten anfängt, und der niedrigste Theil des Multiplicators 1 ist. Wie würden Sie 8973 mit 71 multipliciren?

S. Hier könnte ich auch bloß den Multiplicandus — — 8973
hinsetzen, und darunter gleich das 7fache desselben — — 62811
doch nach der Linken eingeruckt, und ―――
das Factum wäre — — 637083.

L. Auch geht solches nicht bloß bey zweytheiligen Multiplicatoren an, sondern auch bey drey- und mehrtheiligen, wenn der erste oder letzte Theil eine 1 ist. Im ersten Falle multiplicirt man nur von der Linken und in diesem von der Rechten. Wie rechnen Sie also folgendes: 8937x127?

S. So

```
  8937
  17874
   62559
 -------
 1134999
```

L. Und 32984x361?

S. So

```
   32984
  197904
  98952
 --------
 11907224
```

L. Von diesen Vortheilen kann man, wie in die Augen fällt, freylich nicht immer Gebrauch machen, aber doch oft, und dann sind sie wichtig. Noch viel wichtigere Vortheile der Multiplication aber werden wir in der Folge kennen lernen, so bald wir die Multiplication der übrigen Arten der Zahlen uns bekannt gemacht haben werden. Doch heute können wir davon noch nicht sprechen.

Zwölftes Gespräch.

L. Ehe ich zu der Multiplication der Producte und den übrigen Arten der Zahlen fortgehe, wollen wir noch folgende Exempel betrachten. Es soll nemlich 5463 mit 264 multiplicirt werden, wo

```
 5463
  264
-----
21852
32778
10926
-------
1442232
```

das Factum 1442232 wird. Gesetzt nun, daß ich anstatt 5463x264 die Zahlen 546,3x264 nähme, was wäre dann in den gegebenen Zahlen für eine Veränderung vorgenommen worden?

S. Der Multiplicandus wäre zehnmal kleiner gemacht.

L. Und was litte dadurch das Factum 1442232 für eine Veränderung?

S. Es würde ebenfalls zehnmal kleiner, und in folgendes 144223,2 verwandelt.

L. Was litte ferner das Factum für eine Veränderung, wenn man anstatt 5463x264 die Zahlen 54,63x264 nähme?

S. Es würde in folgendes 14422,32 verwandelt, oder hundertmal kleiner, weil der Multiplicandus hundertmal kleiner angenommen wäre.

L. Wie aber, wenn 5463x26,4 genommen würde?

S. Dann wäre das Factum wieder 144223,2; denn der Multiplicator wäre nun zehnmal kleiner als vorher, und eben so vielmal müßte das Factum kleiner seyn.

L. Und 5463x2,64 gäbe?

S. 14422,32, oder ein hundertmal kleineres Factum.

L. Welches wäre denn wohl das Factum aus 54,63x26,4?

S. 1442,232, denn weil hier der Multiplicandus hundertmal kleiner ist als vorhin, so muß deswegen das Factum hundertmal kleiner seyn, und da auch der Multiplicator zehnmal kleiner ist, so muß das hundertmal kleinere Factum noch um zehnmal und also tausendmal kleiner werden.

L. Unterscheidet sich also das Factum zweyer Zahlen, die Zehntheiler enthalten, von dem Factum derselben Zahlen, wenn man sie behandelt, als ob sie keine Zehntheiler enthielten, in Ansehung der Zahlen, oder bloß in Ansehung der Ordnung dieser Zahlen?

S. Es unterscheidet sich bloß in Ansehung der Ordnung seiner Zahlen. Ob man z. B.

5463 mit 264, oder
546,3 mit 264, oder
54,63 mit 264, oder
5463 mit 26,4, oder
5463 mit 2,64, oder
54,63 mit 26,4 u. s. f. multiplicirt;

so wird dadurch in den Zahlen des Factums nichts geändert, diese sind allemal 1442232. Allein die Ordnung dieser Zahlen ist verschieden. Im ersten Falle erhält man 1442232

im andern 144223,2
im dritten 14422,32
im vierten 144223,2
im fünften 14422,32
im sechsten 1442,232.

L. Und wie viel Stellen gehören im Factum jedesmal für die Zehntheiler, wenn dergleichen im Multiplicandus und im Multiplicator sind?

S. So viel als im Multiplicandus und im Multiplicator damit angefüllt sind.

L. Daraus ergiebt sich eine sehr leichte Regel für die Multiplication solcher Zahlen, die Zehntheiler enthalten. Sollten Sie wohl im Stande seyn, dieselbe auszudrucken?

S. Wenn der Multiplicandus und Multiplicator Zehntheiler enthalten, so verrichtet man zuvörderst die Multiplication, als wenn keine Zehntheiler da wären, schneidet aber am Ende in dem Factum durch ein Comma so viel Stellen zur Rechten für die Zehntheiler ab, als im Multiplicandus und Multiplicator damit angefüllt waren.

L. Dabey ist denn nur noch zu merken, daß, wenn das ganze Factum nicht so viel Zifern enthält, als Stellen für die Zehntheiler genommen werden müssen, die fehlenden Stellen mit 0 angefüllt werden. Das Factum aus

36 multiplicirt
mit 24 z. B.

144
72

ist 864. Gesetzt nun, daß 0,0036 mit 0,00024 multiplicirt werden sollte, so müßten in dem Factum 864 neun Stellen für die Zehntheiler abgeschnitten werden. Es enthält aber das Factum 864 nur 3 Zifern, und daher setzt man 6 Nullen davor, und zwar ausser der, nach wel-

cher

cher das Comma gesetzt wird. Es ist also 0,0036 x 0,00024 = 0,000000864. Dies vorausgesetzt, so wird Ihnen die Multiplication solcher Zahlen, die entweder Zehntheiler mit enthalten, oder lauter Zehntheiler sind, in keinem Falle schwer seyn. Auf eine ähnliche Art nun, als man hier anfänglich nicht auf die Ordnuug des Multiplicandus und des Multiplicators sieht, kann man solches auch thun, wenn der Multiplicandus und der Multiplicator zu einer höhern Ordnung gehören, oder am Ende zur Rechten Nullen haben, z. B. wenn man 3600 mit 24000 multipliciren sollte. Vergleicht man nemlich 3600 mit 36, und 24000 mit 24, so ist 3600 hundertmal, und 24000 tausendmal grösser als 24. Hätte man also 36 mit 24 multiplicirt, und wollte darauf 3600 mit 24000 multipliciren, so müßte man das gefundene Factum aus 36x24 erst hundertmal, und dann noch tausendmal grösser machen, und das geschähe, wenn man erst zwey und dann noch drey, also fünf oder so viel Nullen anhienge, als im Multiplicandus und im Multiplicator zusammen sind. Man sieht daher auch, wenn der Multiplicandus und Multiplicator zu einer höhern Ordnung gehören, oder zur Rechten Nullen haben, anfänglich darüber weg, und hängt nach so verrichteter Multiplication an das gefundene Factum so viel Nullen, als der Multiplicandus und Multiplicator enthalten. Nun multipliciren Sie 832000 mit 530000.

S.

S. (Rechnet.)

```
   832000
   530000
 ---------
   2496
  4160
 ---------
 44096000000.
```

L. Wie würden Sie das Exempel aufsetzen und rechnen, wenn Sie 832 mit 53 multipliciren sollten?

S. So

```
   832
    53
  ----
  2496
 4160
 -----
 44096
```

L. Stehen die 53 in dem ersten Exempel eben so als hier?

S. Nein, aber ich könnte sie da eben so setzen, nur käme alsdann die letzte Null im Multiplicator nicht gerade unter die letzte Null des Multiplicandus.

L. Da das nichts in dem Factum ändern kann, so setzen Sie künftig ähnliche Fälle nur immer so auf

```
   832000
    530000
 ----------
  2496
 4160
 ----------
 44096000000;
```

denn auf diese

Art folgen Sie der vorhin angeführten Regel in allen Stücken. — Wie multipliciren Sie nun folgendes: 964000 x 0,36?

S. So 964000
0,36
―――――
5784
2892
―――――
347040,00

L. Kommt hier auf die zwey Nullen nach dem Comma wohl etwas an? oder ist 347040 mit 347040,00 einerley?

S. Beydes ist völlig einerley, und man kann daher die beyden Nullen nach dem Comma auch weglassen.

L. Was haben wir hier für einen Multiplicandus und Multiplicator.

S. Der Multiplicandus gehört zu einer höhern und der Multiplicator zu einer niedern Ordnung.

L. Weil der Multiplicandus zu einer höhern Ordnung gehört, müssen Sie an das Factum 34704 Nullen anhängen, und weil der Multiplicator zu einer niedern Ordnung gehört, von diesem Factum wieder einige Nullen abschneiden oder ausstreichen. Könnten Sie das nicht auf eine kürzere Art so machen, daß Sie zuvor überlegten, wie viel Sie von den anzuhängenden Nullen wieder weglassen müssen, und nur den Ueberrest hinsetzten?

S.

S. Ja das ist besser. In dem vorigen Exempel soll ich z. B. erst die drey Nullen anhängen, und dann wieder zwey abschneiden; ich kann also lieber gleich nur eine Null anhängen.

L. Wenn Sie Sich nun an das erinnern, was wir bey der Multiplication der eintheiligen Zahlen, die zu einer höhern oder niedern Ordnung gehörten, gehabt haben, und mit dem gegenwärtigen vergleichen, so werden Sie finden, daß man bey der Multiplication der bisher betrachteten Zahlen ganz allgemein nach der Regel verfahren könne, daß man erstlich den Multiplicandus und Multiplicator als Einer oder zur Ordnung 0 gehörig betrachte, und darauf die Ordnung des erhaltenen Factums vestsetze, so, daß dieselbe die Summe der Ordnungen des Multiplicandus und des Multiplicators werde, wenn beyde entweder zu einer höhern oder zu einer niedern Ordnung, und der Unterschied dieser Ordnungen, wenn die die gegebenen Zahlen zu entgegen gesetzten Ordnungen gehören. — Wie multipliciren Sie, um auch dies zu berühren, folgendes Exempel: 8604 x 30506?

S. So:

```
      8604
     30506
  ---------
     51624
    43020
   25812
  ---------
 262473624
```

L. Warum rucken Sie denn hier das Factum aus der zweyten Zifer des Multiplicators in den Multiplicandus um zwey Stellen nach der Linken ein?

S. Weil diese zweyte Zifer des Multiplicators von der ersten auch um zwey Stellen entfernt ist. Bey den bisherigen Exempeln kamen im Multiplicator zwischen den Zifern keine Nullen so wie hier vor, sondern entweder am Ende oder im Anfange, und wenn ich daher von einem Theile des Multiplicators zu einem andern fortgieng, so gehörte dieser andere zu der unmittelbar folgenden höhern Ordnung, und da mußte also auch nur immer um eine Stelle nach der Linken eingeruckt werden. Kommen aber im Multiplicator so wie hier Nullen vor, so multiplicirt man damit nicht, aber das Factum aus der folgenden Zifer muß um so viel Stellen weiter eingeruckt werden, so viel Nullen da sind, denn sonst erhielte es den Werth nicht, den es wegen der Ordnung der Zifer des Multiplicators, womit man multiplicirt, haben muß. Die 5 z. B. aus deren Multiplication die zweyte Reihe entstanden ist, gilt 500, und also muß das Factum daraus in der Stelle der Hunderter anfangen. Aus einem ähnlichen Grunde habe ich auch die folgende Reihe um zwey Stellen eingeruckt; denn die letzte Zifer des Multiplicatores gilt 30000, und also muß das Factum aus ihr

und

und den Multiplicandus auch in der Stelle der Zehntausender anfangen.

L. Wie würden Sie es aber nun machen, wenn Sie von der Linken anfiengen zu multipliciren?

S. Dann ruckte ich eben so zur Rechten hinaus, als ich vorhin zur Linken eingeruckt habe; so nemlich

```
   8604
  30506
  -----
  25812
    43020
      51624
  ---------
  262473624
```

L. Nun haben wir alle Fälle betrachtet, die bey der Multiplication der gemeinen Zahlen vorkommen. Was ich noch hinzu zu setzen habe, ist einmal der schon einigemal gegebene Rath, daß Sie Sich auch hier in dem erlernten durch eine häufige und sorfältige Uebung eine so grosse Fertigkeit als möglich zu erwerben suchen, und dann daß ich noch einige Vortheile berühre, durch welche man auch mehrere von denen Fällen, wenn so wohl der Multiplicandus als der Multiplicator mehrtheilige Zahlen sind, im Kopfe auszurechnen im Stande ist. Die gedachte Uebung ist auch hier an und für sich nicht angenehm, aber man bereuet die dabey angewandte Mühe nicht, wenn man da-

durch so weit gekommen ist, daß man bey dem Multipliciren so schnell rechnen kann, als wenn man nur nöthig hätte, die gehörigen Zahlen aufzuschreiben, und bis man dies erreicht hat, muß man auch diese Uebung fortsetzen. Fürs erste will ich Ihnen folgende Exempel zur Uebung aufgeben:

683945 x 3684

93,26045 x 730,986

5679000 x 36458,093

0,7635 x 79,6834

0,6593 x 0,0865473

8597643 x 7936845

3659000 x 83064000

50600059 x 36050008

80793000 x 0,000936.

Rechnen Sie diese Exempel, und wenn Sie damit fertig sind, so setzen Sie Sich selbst noch mehrere auf, welches Ihnen nicht schwer fallen kann, und lassen Sie fürs erste keinen Tag vorbey streichen, ohne an einem oder dem andern sich geübt zu haben. Sie müssen aber auch hier suchen, immer geschwinder und geschwinder zu rechnen. — Nun zu den gedachten Vortheilen. Wie viel ist 40 x 36?

S. (Antwortet schnell.) 1440.

L.

L. Und $1440 - 36$?

S. 1404.

L. Wie konnten Sie vorhin so schnell antworten?

S. Ich dachte mir $40 \times 30 = 1220$, und $40 \times 6 = 240$, und $1220 + 240 = 1440$.

L. Wie viel ist 39×36?

S. Das kann ich so geschwind nicht sagen.

L. Ist nicht $39 = 40 - 1$?

S. Ja.

L. Und wenn Sie anstatt 39×36 zu nehmen 40×36 nehmen, erhalten Sie dann in dem gefundenen Factum nicht einmal 36 zu viel?

S. Ja.

L. Dies also wieder abgezogen, so erhalten Sie doch eben das, was 39×36 giebt?

S. Ja.

L. Wie viel ist also nun 39×36?

S. $1440 - 36$ oder 1404. Nun sehe ich wohl, wie man sich hier helfen kann.

L. Wie viel ist also 39×78?

S. (Nach einigem aber kurzen Nachdenken.) 3042.

L. Wie haben Sie dies gefunden?

S. Ich habe gerechnet, $40 \times 70 = 2800$, und $40 \times 8 = 320$, und $2800 + 320 = 3120$, und $3120 - 78 = 3042$.

L. Ehe man an diese Art gewöhnt ist, scheint sie etwas schwer, und wenn man sich darüber erklären soll, selbst etwas weitläuftig; allein vortheilhaft bleibt sie immer, insbesondere für die Fer-

tigkeit im Kopfe zu rechnen. Sie sehen auch leicht, daß man von derselben jedesmal Gebrauch machen kann, wenn die eine von den gegebenen Zahlen um 1 kleiner ist als eine eintheilige Zahl von einer höhern Ordnung, und 49x93, 76x69, 19x38, 29x17, 35x59. u. s. w. sind lauter Fälle, wo diese Art angebracht werden kann. Um sie Sich geläufig zu machen, kann ich Ihnen keinen bessern Rath geben, als daß Sie Sich oft dergleichen Fälle aufschreiben, und sie so geschwind als möglich auszurechnen suchen, und zwar immer auf die erklärte Art. Nach einiger Uebung werden Sie finden, daß man mit viel größerer Gewisheit hier rechnet, wenn man nicht nur von dem Multiplicator, sondern auch von dem Multiplicandus die Zahlen der höchsten Ordnung zuerst nimmt. Dieses setzt uns auch dann in den Stand, ein verlangtes Factum leicht im Kopfe zu finden, wenn ein zweytheiliger Multiplicandus oder Multiplicator um 1 grösser ist, als eine eintheilige Zahl einer höhern Ordnung. Würde man z. B. gefragt, wie viel 78x41 wäre, so könnte man rechnen: 40x70=2800, und 40x8=320, und 2800+320=3120, und dazu 1x78, so kommt 3198. Hiebey kann man auch zu mehrerer Erleichterung die Zehner des Multiplicators zuerst als Einer betrachten, und das gefundene Factum darauf durch Anhängung einer Null gehörig vergrössern. In diesem Falle rechnete man 4x70=280, und 4x8=32, und 280+32=

312,

312, dazu eine 0, so kommen 3120, und dazu einmal 78, so erhält man 3198. — Nun zu einer andern Sache. Sie wissen bereits, daß wenn man von zwey gegebenen Zahlen, die mit einander multiplicirt werden sollen, die eine vergrössert, dadurch auch das Factum vergrössert werde, und zwar jederzeit gerade so viele Male, als man die eine von den gegebenen Zahlen vergrössert hat. Angenommen also, daß man das Factum 6x8 mit 9 multipliciren sollte; was würde man zu thun haben?

S. Man müßte alsdann entweder die 6 oder die 8 mit 9 multipliciren.

L. Und das gesuchte Factum wäre also?

S. Entweder 54x8 oder 6x72.

L. Und wenn 9x6x5 mit 4 multiplicirt werden sollte, so wäre das Factum?

S. Entweder 36x6x5, oder 9x24x5, oder 9x6x20.

L. Wenn Sie Sich nun hier an das wieder erinnern, was wir im Anfange unserer Unterredungen von den einfachen und zusammen gesetzten Zahlen gehabt haben; so werden Sie leicht bemerken, daß unter einem Factum und einer zusammen gesetzten Zahl, welcher wir den Namen Product gegeben, kein Unterschied sey. 21=7x3 kann man z. B. lesen, 21 ist ein Factum aus 7 und 3, oder 21 ist eine aus 7 mal 3 zusammen gesetzte Zahl oder Product. Dies vorausgesetzt,

so ist Ihnen ohnstreitig auch die Frage leicht zu beantworten: Was hat man mit einem Producte für eine Veränderung vorzunehmen, wenn man dasselbe mit einer Zahl multipliciren soll?

S. Man multipliciret den einen von den Factoren des Products mit der gegebenen Zahl.

L. Was für einen?

S. Irgend einen, es ist gleich viel, welchen.

L. Was zeigt der Ausdruck 3a an?

S. Ein Product oder Factum aus 3 und a.

L. Wie multipliciren Sie also 3a mit 6?

S. Ich multiplicire die 3 mit 6 und setze neben das Factum a, so daß also das ganze Factum 18a wird.

L. Wie würden Sie aber wohl a mit b multipliciren?

S. Hier kann ich nicht multipliciren, denn wenn mir gesagt wird, daß ich a mit b multipliciren soll, so heißt das, daß ich eine Grösse oder Zahl mit einer Zahl multipliciren soll. Allein das ist zur wirklichen Multiplication nicht hinlänglich, dazu wird erfordert, daß immer der Multiplicandus und Multiplicator, oder wenigstens der letztere ganz bestimmt gegeben sey.

L. Allein wenn Sie hier nicht wirklich multipliciren können, so sind Sie doch wohl im Stande, anzuzeigen, daß es geschehen solle, und zwar nicht durch Worte, sondern durch Zeichen?

S. O ja, dann schreibe ich a x b.

L. So geht es an, und man bedient sich auch öfters dieser Bezeichnung. Indeß hat man noch zwey andre Arten solches zu thun, welche Sie Sich hier merken müssen. Man setzt nemlich entweder anstatt des Zeichens x einen Punkt zwischen die Zahlen, die multiplicirt werden sollen, oder man schreibt dieselben, wenn sie durch Buchstaben bezeichnet sind, unmittelbar und ohne irgend ein Zeichen dazwischen zu setzen, neben einander. Anstatt axb würden Sie also auch setzen können.

S. Entweder a. b, oder ab.

L. Und beydes hiesse?

S. Das Product oder Factum aus a und b.

L. Es kommt in der Arithmetik der Fall sehr häufig vor, daß man das, was zu thun verlangt wird, nicht wirklich zu thun, sondern nur anzuzeigen hat, daß es geschehen solle. In der Addition und Subtraction, der Vereinigung entgegen gesetzter Zahlen und der Bestimmung ihres Unterschiedes nicht nur, sondern auch in der Multiplitation und Division u. s. w. ereignet er sich, und wenn man bey zusammen gesetzten Rechnungen, ehe man dieselben wirklich unternimmt, sich alles, was man dabey zu thun hat, zuvor aufzeichnet, so ist man oft im Stande, auf einem weit kürzern Wege als sonst zu seinem Ziele zu gelangen. Ich kann dies hier nur berühren, nicht deutlich zeigen, die Folge aber wird Sie hievon zur Gnüge belehren. So oft daher von Ihnen verlangt wird, daß Sie mul-

multipliciren sollen, und Sie nicht im Stande sind, solches wirklich zu thun, so zeigen Sie selbiges nur auf die erklärte Art an. Was bringen Sie also heraus, wenn Sie ab mit c multipliciren?

S. abc.

L. Haben Sie nun schon wirklich multiplicirt?

S. Nein, sondern nur angezeigt, daß ab mit c multiplicirt werden solle.

L. Eigentlich hätte ich also fragen müssen: Was bringen Sie heraus, wenn Sie, daß ab mit c multiplicirt werden soll, auf eine kurze und in der Arithmetik übliche Art anzeigen wollen? und Sie hätten antworten können: ab×c, oder ab.c oder abc. Indeß pflegt man hier so zu sprechen, als ob diese Anzeige wirkliche Multiplication sey, und also abc auch das Factum aus ab und c zu nennen. Wenn nun a die Zahl 4 und b die Zahl 8 gilt, so bedeutet ab?

S. 4×8 oder 32.

L. Und wenn c die Bedeutung 6 hat, so gilt abc?

S. 4×8×6 oder 192.

L. Wenn aber a=5, b=3 und c=4 wäre; so gälte ab?

S. 5×3 oder 15.

L. Und abc?

S. 5×3×4 oder 60.

L. So bald Ihnen daher der Werth der Buchstaben in einem Factum, wie ab oder abc gege-

gegeben ist, so sind Sie auch, die Kenntniß der Multiplication vorausgesetzt, im Stande, das ganze Factum seinem Werthe nach bestimmt auszudrucken. — Die Fälle, welche wir bis jetzt betrachtet haben, waren alle von der Art, daß von den beyden Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden sollten, nur die eine ein Product war; oft sind auch beyde Producte, und daher müssen wir nun auch diese kennen lernen. Wenn der Multiplicator ein Product ist, so zeigt derselbe eine öftere und zwar eine so oftmalige Multiplication an, als er Factoren enthält. Sollte z. B. 8x6 mit 9x3 multiplicirt werden, so würde die Multiplication zweymal, sollte aber 8x6 mit 4x5x7 multiplicirt werden, so würde sie dreymal anzuwenden seyn, und zwar so, daß man zuerst den Multiplicandus selbst mit dem einen Factor des Multiplicators dann das daraus entstandene Factum mit dem andern Factor des Multiplicators, ferner das, was man nun herausgebracht, mit dem dritten Factor des Multiplicators multiplicirte. Nur dies gemerkt, so ist hier alles leicht. So viele Factoren ferner neben einander stehen mögen, so ist immer die Bedeutung, daß der erste mit dem zweyten, dann das Factum aus diesen beyden mit dem dritten, ferner das Factum aus den drey ersten mit dem vierten u. s. w. multiplicirt werden solle. Folglich ist es einerley ob man schreibt

Einerley Zeichen im Multiplicandus und Multiplicator geben im Factum +, verschiedene aber —; das Zeichen des Factums bestimmen, dann die im Multiplicandus und Multiplicator vorkommende Zahlen wirklich mit einander multipliciren und endlich die Buchstaben beyder neben einander setzen. Durch diese Bemerkung wird die Multiplication der Buchstaben, so lange der Multiplicandus und Multiplicator eintheilig sind, oder jeder nur Ein Product ist, sehr leicht verrichtet. Aber beyde können nun auch vieltheilig seyn; z. B. wenn 3a +2b—5c mit 6a, oder mit 4a—6b multiplicirt werden sollte. — Wie würden Sie in diesem Falle sich verhalten?

S. Das weiß ich nicht.

L. Wie haben Sie es bey der Multiplication vieltheiliger Zahlen gemacht?

S. Da nahm ich einen Theil des Multiplicators nach dem andern, multiplicirte mit einem jedem alle Theile des Multiplicandus, und addirte am Ende alle gefundene Factums.

L. Sollten Sie nicht auch hier das Factum aus einem mehrtheiligen Multiplicandus und Multiplicator finden, wenn Sie auf gleiche Weise verführen?

S. Freylich muß ich das; allein wie setze ich unter, wenn ich zu einem neuen Theile des Multiplicators fortgehe?

L. Bey den Zahlen ruckten Sie dann das herausgebrachte um eine Stelle weiter nach der Linken oder nach der Rechten, je nachdem Sie von der Rechten oder von der Linken zu multipliciren angefangen. Warum thaten Sie das?

S. Damit die Zahlen von gleicher Ordnung unter einander zu stehen kamen?

L. Haben wir bey den Buchstaben oder Producten auch Ordnungen?

S. Nein.

L. Also haben Sie bloß darauf bey der Setzung der einzeln Factums zu sehen, daß die gleichnamigen unter einander zu stehen kommen. Uebrigens ist es gut, daß die Factums aus jedem Theile des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus in eine besondere Reihe geschrieben werden. Nun multipliciren Sie $3a + 2b - 5c$ mit $6a$.

S. (Schreibt auf.)

$$\begin{array}{l} 3a + 2b - 5c \\ 6a \\ \hline 18aa + 12ab - 30ac. \end{array}$$

L. Ferner auch $3a + 2b - 5c$ mit $4a - 6b$.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{llllll} 3a & + 2b & - 5c & & & \\ 4a & - 6b & & & & \\ \hline 12aa & + 8ab & - 20ac & & & \\ & - 18ab & & & - 12bb & + 30bc \\ \hline 12aa & - 10ab & - 20ac & & - 12bb & + 30bc. \end{array}$$

L. Wie ist das gekommen, daß Sie den Multiplicator zur Linken gerade unter den Multiplicandus gesetzt haben? Bey den Zahlen pflegten Sie ja so zu schreiben, daß die Zahlen wo möglich zur Rechten gerade unter einander standen.

S. Ich habe es deswegen gethan, weil die ersten Theile des Multiplicators mit den ersten Theilen des Multiplicandus gleichnamig sind.

L. Wie also, wenn Sie $5a+3b-7c-4f$ mit $-8b+4c-9f$ multipliciren sollten?

S. Dann setzte ich

$$\begin{array}{ll} & 5a+3b-7c-4f \text{ multiplicirt} \\ \text{mit} & \quad\;\; -8b+4c-9f. \end{array}$$

L. Nothwendig ist dies nicht, ja es ist noch besser, wenn auch in Fällen wie der jetzige, und also überhaupt Multiplicandus und Multiplicator zur Linken gerade unter einander gesetzt werden. Denn da man bey der Multiplication der Buchstaben von keinem der einzeln Factums zu dem folgenden wie solches bey der Multiplication der Zahlen statt fand, etwas hinzu zu nehmen hat, so multipliciret man da durchaus von der Linken zur Rechten, und dabey ist die gedachte Setzung gut, weil sonst der Multiplicator entfernter stünde. Nun rechnen Sie das angeführte Exempel

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
-5a & +3b & -7c & -4f & & & & & \\
8b & +4c & -9f & & & & & & \\
\hline
-40ab & -24bb & +56bc & +32bf & & & & & \\
 & & +12bc & & +20ac & -28cc & -16cf & & \\
 & & & -27bf & & & +63cf & -45af & +36ff \\
\hline
-40ab & -24bb & +68bc & +5bf & +20ac & -28cc & +47cf & -45af & +36ff.
\end{array}$$

L. Bey diesem Exempel ereignet sich der Fall, daß man die einzeln Producte nicht immer gerade nach einander aufschreiben kann. Denn in der zweyten Reihe mußten Sie das erste Factum +20ac hinausrucken, weil Sie noch kein gleichnamiges hatten, und eben das mußten Sie in der dritten Reihe gleich anfänglich mit −45af thun. Die übrigen Factums kommen darauf theils vor theils nach dem angeführten zu stehen. Bey den vorhergehenden Exempeln war das so nicht, sondern da erhielt ein jedes Factum in seiner Reihe den Platz, den der eine seiner Factoren im Multiplicandus gehabt hatte. Wenn dies statt findet, so kann man das Exempel, wenn man bey jedem neuen Theile des Multiplicators eine neue Reihe angefangen hat, bequem nachsehen, weil dann die Reihe der einzeln Factums den genommenen Theil des Multiplicators, und die Stelle jedes Factums darin den genommenen Theil des Multiplicandus anzeigt. Betrachten Sie nemlich das Exempel, wo 3a+2b−5c mit 4a−6b multiplicirt worden, so werden Sie finden, daß das erste Factum der ersten Reihe aus dem ersten Theile des Multiplicandus und dem ersten Theile des Multiplicators, das zweyte Factum der ersten Reihe aus dem zweyten Theile des Multiplicandus und dem ersten Theile des Multiplicators u. s. w. entstanden sey. Deswegen rieth ich Ihnen eben vorher, jedesmal, wenn Sie zu einem neuen Theile des Multiplicators

tors fortgiengen, eine neue Reihe anzufangen. Bey dem letzten Exempel hat man diesen Vortheil bey der etwa anzustellenden Prüfung nicht; sondern man muß sich da auf die Art helfen, daß man die Buchstaben des zu beurtheilenden Factums betrachtet, und darnach die Theile des Multiplicandus und Multiplicators aufsucht, aus welchen es entstanden ist. Nun noch einige Exempel zur Uebung. Multipliciren Sie also $a+b$ mit $a+b$.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{rrr} & a+b & \\ & a+b & \\ \hline aa+ab & & \\ & +ab+bb & \\ \hline aa+2ab+bb. & & \end{array}$$

L. Ferner $a+b$ mit $a-b$.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{rrr} & a+b & \\ & a-b & \\ \hline aa+ab & & \\ & -ab-bb & \\ \hline aa-bb. & & \end{array}$$

L. Und $a-b$ mit $a-b$.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{rrr} & a-b & \\ & a-b & \\ \hline aa-ab & & \\ & -ab+bb & \\ \hline aa-2ab+bb. & & \end{array}$$

S. Auf dreyerley Art. Entweder auf die gewöhnliche Art, so

```
  56432
     24
 ------
 225728
112864
-------
1354368, oder
```

ich multiplicire 56432 mit 4, und das Factum daraus, neml. 225728 wieder mit 6

1354368; oder

ich multiplicire 56432 mit 3, und das Factum daraus, nemlich 169296 mit 8.

1354368.

Denn auf diese Art muß man nach dem, was wir von der Multiplication mit Producten in der letzten Unterredung gehabt haben, verfahren.

L. Welche Art zu multipliciren ist hier wohl die kürzeste?

S. Die Multiplication mit den Factoren des Multiplicators. Denn erstlich hat man dabey nur 18 Zahlen aufzuschreiben, da man bey der gewöhnlichen Art 26 hinsetzen muß, und ausserdem braucht man dabey nicht zu addiren.

L. So oft man daher den Multiplicator, ohne sich lange zu besinnen, in Factoren zerfällen kann, die eintheilig sind, so kann man sich die Arbeit verkürzen, indem man mit den Factoren des Multipli-

cators die Multiplication auf die vorhin beobachtete Art oder so verrichtet, daß man erst den Multiplicandus mit dem einen Factor, und dann das gefundene Factum mit dem andern Factor multiplieiret. Anstatt mit 48 zu multipliciren, könnten Sie also auch multipliciren mit?

S. 6x8.

L. Und anstatt 63 könnten Sie nehmen?

S. 7x9.

L. Um des Vortheils willen, den man davon hat, wenn man den Multiplicator in seine Factoren zerfällt und mit diesen multiplicirt, ist es wichtig, nicht nur den Unterschied zwischen einfachen und zusammen gesetzten Zahlen zu wissen, sondern auch die Factoren der zusammen gesetzten Zahlen sich bekannt gemacht zu haben. Denn wenn man erst lange überlegen muß, ob der Multiplicator eine zusammen gesetzte Zahl ist oder nicht, und die Factoren desselben nicht gleich übersieht; so verschwindet der gedachte Vortheil wieder, und die gewöhnliche Art führt oft weit eher zum Ziele. Aus dieser Ursache werde ich daher in der Folge, zumal da es ausserdem auch andere Gründe rathen, noch besonders mit Ihnen über die einfachen und zusammen gesetzten Zahlen, und die Art, die Factoren dieser letztern zu finden, sprechen. Uebrigens erreichten wir den betrachteten Vortheil dadurch, daß wir anstatt einer gegebenen

ihn nur um eine eintheilige Zahl übertrift, nehmen kann, und in diesem Falle sucht man also das Factum aus dieser grössern Zahl in den gegebenen Multiplicator, und zieht davon das Factum des Ueberschusses in den gedachten Multiplicator ab. Ist nun der Ueberschuß 1, so ist das abzuziehende der Multiplicator selbst; ist er 2, so ist das abzuziehende das Zwiefache des Multiplicators; ist er 3, so ist das abzuziehende das Dreyfache des Multiplicators, u. s. w. Wenn der Multiplicator eine eintheilige Zahl ist, und bey dem Multiplicandus sich die erwähnten Umstände finden, dann ist insbesondere die beschriebene Art das Factum zu finden, bequem; in vielen Fällen kann man sich ihrer indeß auch bey zweytheiligen Multiplicatoren, wenn man nemlich das Vielfache derselben leicht im Kopfe finden kann, bedienen. Multipliciren Sie z. B. 695 mit 12.

S. Das macht 8340; denn 700x12 ist 8400, und 5x12 oder 60, weil 700 um 5 grösser ist als 695, von 8400 abgezogen, bleiben 8340.

L. Und was giebt 898x48?

S. 43104. Dies Exempel scheint mir aber doch schwer, weil ich 48 neunmal nehmen muß, und dergleichen übersieht man doch so leicht nicht.

L. Ich würde hier gerechnet haben: 9x48 ist so viel als 9x50—9x2, d. h. 450—18 oder

432.

432. Also 900x48, 43200, und 2x48 oder 96 davon abgezogen, bleiben 43104. Auf diese Art läßt sich der gedachte Vortheil zweymal anbringen, und bey einiger Einbildungskraft auch dieses und ihm ähnliche Exempel im Kopfe ausrechnen. — Nun zur Anwendung der bisher betrachteten Regeln der Multiplication der Producte auf die Multiplication der Dignitäten, und zwar erstlich solcher, die einerley Wurzel haben oder gleichartig sind. Wenn Sie also 4x4 mit 4x4x4 multipliciren sollten, so wäre doch das eben so viel, als wenn von Ihnen verlangt würde, daß Sie die zweyte Dignität von 4 mit der dritten Dignität von 4 multipliciren sollten? Nicht?

S. Ja.

L. Und ich könnte daher 4x4 multiplicirt mit 4x4x4 auch so schreiben: $4^2 x 4^3$?

S. Ja.

L. Umgekehrt ist doch der Ausdruck $4^2 x 4^3$ auch mit diesem, 4x4 multiplicirt mit 4x4x4 einerley?

S. Natürlicher Weise.

L. Wie können Sie denn nun nach dem, was wir bey der Multiplication der Producte gehabt haben, 4x4 multiplicirt mit 4x4x4 kurz anzeigen?

S. Durch 4x4x4x4x4.

L. Und dieses nach dem, was ich Ihnen von der Art, die Producte, die aus lauter gleichen Facto-

Factoren bestehen, oder die Dignitäten, zu schreiben, gesagt habe?

S. So: 4^5.

L. Was giebt also $4^2 \times 4^3$?

S. 4^5.

L. Vielleicht können Sie mir nun auch sagen, was $6^5 \times 6^4$ giebt?

S. 6^9.

L. Und $8^6 \times 8^5$?

S. Giebt 8^{11}.

L. Um die hier zu befolgende Verfahrungsart deutlich einsehen zu lernen, beantworten Sie mir folgende Fragen: Wenn ein Product mit einem Producte multiplicirt wird, was ist das Factum für eine Zahl; ein Product oder nicht?

S. Das Factum ist ebenfalls ein Product.

L. Und was für Factoren enthält dasselbe.

S. Alle die Factoren, die im Multiplicandus und im Multiplicator enthalten waren.

L. Gesetzt also, daß die Factoren des Multiplicandus und des Multiplicators alle einander gleich sind; aus was für Factoren besteht alsdann das Product derselben?

S. Auch aus lauter gleichen Factoren.

L. Und aus wie vielen?

S. Aus so vielen, als der Multiplicator und Multiplicandus zusammen enthalten.

L. Nun erinnern Sie Sich deutlich daran, daß man Producte aus gleichen Factoren Dignitäten

täten eines jeden dieser Factoren nennt, so wie einen jeden dieser Factoren die Wurzel davon; ferner daran, daß die Dignitäten und Wurzeln von der Anzahl der gleichen Factoren einen Beynamen erhalten, und die zweyte, dritte, vierte Dignität oder Wurzel heissen, je nachdem zwey, drey oder vier gleiche Factoren da sind; endlich daran, daß man Dignitäten von einerley Wurzel gleichartige, so wie die von verschiedenen Wurzeln ungleichartige nennt; wenn Sie Sich dies deutlich vorstellen, so werden Sie auch auf folgende Fragen antworten können. Was erhält man wenn man eine Dignität mit einer gleichartigen multiplicirt? ein blosses Product, oder ebenfalls eine Dignität?

S. Eine Dignität.

L. Und was für eine? eine gleichartige oder ungleichartige?

S. Eine gleichartige.

L. Und wie groß ist der Exponent oder Logarithme derselben, d. h. die Zahl, welche die Menge ihrer gleichen Factoren anzeigt?

S. So groß als die Summe der Exponenten oder Logarithmen der beyden gleichartigen Dignitäten, die man mit einander multipliciren soll.

L. Nun werden Sie schon mit mehrerer Gewisheit einsehen, warum $6^5 \times 6^4 = 6^9$ und $8^6 \times 8^5 = 8^{11}$ ist; und auch im Stande seyn zu sagen, was $a^5 \times a^3$ giebt?

S. a^8.

L.

L. Und $b^9 \times b^5$?

S. b^{14}.

L. Gesetzt daß Ihnen bisweilen die Regel, nach welcher Sie hier verfahren, nicht deutlich seyn sollte, so können Sie jeden einzeln Fall Sich leicht entwickeln, wenn Sie nur die gleichen Factoren der gegebenen Dignitäten selbst hinsetzen, dann nach den Regeln der Multiplication der Producte verfahren, und endlich das gefundene Factum auf die kurze bey Dignitäten übliche Art bezeichnen. Es ist

$6^5 \times 6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \,.\, 6 \times 6 \times 6 \times 6$, und

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \,.\, 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

ferner $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^9$, und also

$6^5 \times 6^4 = 6^9$. Desgleichen ist

$a^5 \times a^3 = aaaaa \times aaa$, und

$aaaaa \times aaa = aaaaaaaa$ und

$aaaaaaaa = a^8$, also

$a^5 \times — a^3 = a^8$.

Die Multiplication gleichartiger Dignitäten ist also mit keinen Schwierigkeiten verknüpft, denn man hat dabey nur nöthig, die Exponenten oder Logarithmen der gegebenen Dignitäten zu addiren, und von der Wurzel derselben die Dignität zu nehmen, welche diese Summe anzeigt, so wie solches die vorhergehenden Exempel zeigen. Aber eben der Umstand, der die Multiplication der gleichartigen Dignitäten so leicht macht, ist der Grund der wichtigsten Vortheile. Diese dem Anfange

nach

nach kennen zu lernen, betrachten Sie folgende Reihen:

Exponenten oder Logarithme.	Dignitäten der Wurzel 2.	Exponenten oder Logarithme.	Dignitäten der Wurzel 3.
1	2	1	3
2	4	2	9
3	8	3	27
4	16	4	81
5	32	5	243
6	64	6	729
7	128	7	2187
8	256	8	6561
9	512	9	19683
10	1024	10	59049
11	2048	11	177147
12	4096	12	531441
13	8192	13	1594323
14	16384	14	4782969
15	32768	15	14348907
16	65536	16	43046721
17	131072	17	129140163
18	262144	18	387420489
19	524288	19	1162261467
20	1048576	20	3486784401
21	2097152	21	10460353203
22	4194304	22	31381059609
23	8388608	23	94143178827
24	16777216	24	282429536481

Die Zahlen, welche unter dem Titel Exponenten oder Logarithmen stehen, zeigen an, was für eine Dignität die neben stehende Zahl entweder von 2 oder von 3 sey. Die 13 z. B. in der ersten Columne zur Linken zeigt an, daß 8192 die 13te Dignität von 2, und die 13 in der dritten Columne, daß 1594323 die dreyzehnte Dignität von 3 sey. Die Richtigkeit dieser Tabellen nun vorausgesetzt, so setzen Sie uns vermittelst des vorhin von der Multiplication gleichartiger Dignitäten erlernten in den Stand, das Factum jeder zweyer in derselben befindlichen Zahlen, wenn dasselbe die 24te Dignität von 2 oder 3 nicht übersteigt, durch eine leichte Addition zu finden. Was multipliciren Sie z. B. für Dignitäten von 2 mit einander, wenn Sie die Zahlen 8192 und 512 mit einander multipliciren?

S. (Sieht in der Tabelle nach.) Die 13te und 9te.

L. Und was werden Sie also für eine Dignität von 2 herausbringen?

S. Die 22te.

L. Was ist das für eine Zahl?

S. 4194304.

L. Was multipliciren Sie ferner für Dignitäten von 3 mit einander, wenn Sie 531441 mit 177147 multipliciren?

S.

S. (Nachdem er in der Tabelle nachgesehen.) Die 12te und 11te.

L. Und was für eine Dignität von 3 wird also das Factum seyn?

S. Die 23te.

L. Und also was für eine Zahl?

S. 94143178827.

L. Haben Sie also bey diesen beyden Exempeln nöthig zu multipliciren, um das verlangte Factum zu finden?

S. Nein, sondern ich addire nur.

L. Und welches ist überhaupt das ganze Verfahren, welches Sie zu beobachten haben?

S. Ich sehe zuvörderst in der Tabelle nach, was für Dignitäten die Zahlen sind, welche ich mit einander multipliciren soll, dann addire ich ihre Exponenten oder Logarithmen zusammen, und sehe endlich nach, was für eine Zahl bey dem Logarithmen steht, der dieser Summe gleich ist, und diese Zahl ist das gesuchte Factum.

L. Wie wenn man Tabellen hätte, welche den gebrauchten ähnlich wären, und alle Zahlen enthielten?

S. Das wäre eine vortrefliche Sache; denn alsdann hätte man nicht nöthig, zu multipliciren,

wenn man das Factum zweyer Zahlen zu wissen verlangte, sondern man dürfte nur addiren.

L. Die gebrauchten Tabellen sind nun freylich sehr unvollständig, denn wie viel Zahlen fehlen nicht in ihnen; allein in der Folge werden Sie ähnliche und vollständigere Tabellen kennen lernen, und dadurch in den Stand gesetzt werden, öfter auf eine solche Art das Factum zweyer Zahlen zu finden, als sie vorhin zwey Factums gefunden haben. Bis dahin wollen wir denn auch die genauere Betrachtung dieser Tabellen verschieben, und nun noch die Multiplication ungleichartiger Dignitäten und verschiedener Wurzeln vornehmen. Was giebt also die 6te Dignität von 2 mit der 3ten Dignität von 3 multiplicirt?

S. Hier kann ich nichts weiter thun, als das anzeigen, was geschehen soll. Denn wenn ich die 6te Dignität von 2 so schreibe: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, und die 3te Dignität von 3 so, $3 \times 3 \times 3$ so fällt in die Augen, daß das Product aus beyden $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$, oder $2^6 \times 3^3$ sey.

L. Was giebt also a^6 multiplicirt mit b^3?

S. $a^6 b^3$.

L. Und $6a^6 \times 4b^3$?

S. $24a^6 b^3$.

L. Und $-6a^3x-5b^4$.

S. $+306a^3b^4$.

L. Also verfährt man bey der Multiplication ungleichartiger Dignitäten eben so, als bey der Multiplication der Producte oder Buchstaben überhaupt, und eben das findet bey der Multiplication verschiedener Wurzeln statt. Rechnen Sie also zum Schlusse dieser Unterredung nur noch folgende Exempel: Erstlich was giebt $6a^3-4b^2+5c^2$ multiplicirt mit $5d^2+2f^3$.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{l} 6a^3 - 4b^2 + 5c^2 \\ 5d^2 + 2f^3 \\ \hline 30a^3d^2 - 20b^2d^2 + 25c^2d^2 \\ \qquad\qquad\qquad + 12a^3f^3 - 8b^2f^3 + 10c^2f^3 \\ \hline 30a^3d^2 - 20b^2d^2 + 25c^2d^2 + 12a^3f^3 - 8b^2f^3 + 10c^2f^3. \end{array}$$

L. Was giebt ferner $5a^4 - 3b^2 + 4c - d$ multiplicirt mit $5a^4 + 3b^2 - 4c + d$?

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
5a^4 & -3b^2 & +4c & -d & & & & \\
5a^4 & +3b^2 & -4c & +d & & & & \\
\hline
25a^8 & -15a^4b^2 & +20a^4c & -5a^4d & & & & \\
 & +15a^4b^2 & & & -9b^4 & +12b^2c & -3b^2d & \\
 & & -20a^4c & & & +12b^2c & -16c^2 & +4cd \\
 & & & +5a^4d & & -3b^2d & +4cd & -d^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$25a^8 - 9b^4 + 24b^2c - 6b^2d - 16c^2 + 8cd + d^2.$$

L.

L. Was giebt nun $\sqrt{a} - 2d + 3\sqrt{c}$ multiplicirt mit $\sqrt{b} + f$?

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{l} \sqrt{a} \quad -2d \quad +3\sqrt{c} \\ \underline{\sqrt{b} \quad +f \qquad\qquad\qquad} \\ \sqrt{a}\sqrt{b} - 2d\sqrt{b} + 3\sqrt{e}\sqrt{b} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \sqrt{a}.f - 2df + 3\sqrt{e}.f \\ \hline \sqrt{a}\sqrt{b} - 2d\sqrt{b} + 3\sqrt{e}\sqrt{b} + \sqrt{e}.f - 2df + 3\sqrt{e}.f \end{array}$$

L. Wie endlich $5a^{\frac{3}{4}} + 2cd - 5b^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt mit $3f^{\frac{2}{3}} - 6g$?

S. So:

$$\begin{array}{l} 5a^{\frac{3}{4}} \quad +2cd \quad -5b^{\frac{1}{2}} \\ \underline{3f^{\frac{2}{3}} \quad -6g \qquad\qquad} \\ 15a^{\frac{3}{4}}f^{\frac{2}{3}} + 6cdf^{\frac{2}{3}} - 15b^{\frac{1}{2}}f^{\frac{2}{3}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -30a^{\frac{3}{4}}g - \end{array}$$

$12cdg + 30b^{\frac{1}{2}}g$. Da hier alle einzelne Factums verschieden sind, so habe ich nicht nöthig, die Summe weiter zu suchen.

L. Und hiermit wollen wir fürs erste die Multiplication beschliessen, ob uns gleich noch einiges übrig ist. Denn einmal haben wir nur immer Mnltiplicatorzahlen betrachtet, und noch gar keine Divisoren, und dann bedarf insbesondere die Multiplication ungleichartiger Dignitäten noch verschiedene Erläuterungen. Von der Multiplication der Divisoren aber werden wir besser nach der Division und von dem übrigen bequemer bey der Erhebung der Zahlen zu Dignitäten reden.

Vierzehntes Gespräch.

L. Was heißt Dividiren?

S. Theilen.

L. Wenn man also aus 8 Rthlr., 5 Rthlr. und 3 Rthlr. macht, dann hat man dividirt, denn man hat 8 Rthlr. in 5 Rthlr. und 3 Rthlr. getheilt?

S. Ich habe vergessen hinzu zu setzen, in gleiche Theile; denn nicht eine jede Theilung ist Division, sondern nur die, da man die Grösse, welche man theilt, in lauter gleiche Theile zerlegt.

L. Also habe ich doch dividirt, wenn ich aus 50 Rthlr. fünfmal 10 Rthlr. gemacht habe?

S. Ja.

L. Oder wenn ich aus 24 Rthlr. viermal 6 Rthlr. gemacht habe?

S. Ja.

L. Was bringen Sie heraus, wenn Sie 50 Rthlr. durch 5 Dividiren?

S. 10 Rthlr.

L. Und wenn Sie 24 Rthlr. durch 4 dividiren?

S. 6 Rthlr.

L. Erhalten Sie, wenn Sie dividiren, im vorhergehenden Falle 5 mal 10 Rthlr. und in diesem

sem 4 mal 6 Rthl., oder in jenem einmal 10 Rthl. und in diesem einmal 6 Rthlr.?

S. Ich bekomme im ersten Falle einmal 10 Rthlr. und in dem andern einmal 6 Rthlr.

L. Also hat man bey der Division doch wohl nicht ganz eine Theilung in gleiche Theile zu denken, weil sonst 50 Rthlr. durch 5 dividirt 10 Rthlr. fünfmal, und 24 Rthlr. durch 4 dividirt 6 Rthlr. 4 mal geben müßte?

S. Ich sehe wohl, daß meine Erklärung noch nicht passend ist.

L. Finden Sie durch die Division viele Theile oder nur einen Theil der zu theilenden Grösse?

S. Nur einen Theil.

L. Und was für einen? Wenn Sie 50 Rthlr. durch 5 dividiren, so erhalten Sie 10 Rthlr., und wenn Sie 24 Rthlr. durch 4 dividiren, so bekommen Sie 6 Rthlr. Was ist 10 Rthlr. von 50 Rthlr. für ein Theil?

S. Der 5te Theil.

L. Und 6 Rthlr. von 24 Rthlr.?

S. Der 4te Theil.

L. Wenn Sie durch 5 dividiren, so finden Sie den 5ten, und wenn Sie durch 4 dividiren, den 4ten Theil derjenigen Grösse, welche Sie dividiren sollen. Was für einen Theil würden Sie finden, wenn Sie durch 8 dividirten?

S. Den 8ten Theil.

L. Und wenn Sie durch 6 dividirten?

S. Den 6ten Theil.

L. Also was für einen Theil jedesmal?

S. Jedesmal den Theil, welchen die Zahl anzeigt, durch welche dividirt wird.

L. Dividiren Sie doch einmal 36 Rthlr.?

S. Durch was für eine Zahl?

L. Müssen Sie dieselbe auch wissen?

S. Wenn ich gerade so, als Sie es haben wollen, diviren soll, allerdings; denn sonst kann ich mir auch selbst eine Zahl wählen.

L. Also durch 4.

S. Dann kommen 9 Rthlr.

L. Und nun dividiren Sie durch 9.

S. Wieder die 36 Rthlr.

L. Nein.

S. Was denn also?

L. Ist es nicht genug, daß ich Ihnen die Zahl sage, durch welche Sie dividiren sollen?

S. Nein ich muß auch die Grösse wissen, welche dadurch dividirt werden soll.

L. Also 72 Rthlr.

S. Dann kommen 8 Rthlr.

L. Wie viel Dinge müssen Ihnen also gegeben seyn, wenn Sie dividiren sollen?

S. Zwey; erstlich die Grösse, welche dividirt werden, und dann die Zahl, durch welche man dividiren soll.

L. Jene nennt man nun den Dividendus, und diese den Divisor, so wie dasjenige, was man

man nach vollbrachter Division erhält, der Quotient heißt. Merken Sie Sich diese Benennungen, weil ich sie von jetzt an beständig gebrauchen werde. Wenn man den Dividendus jedesmal als ein Ganzes betrachtet, so ist der Quotient davon, — was wohl?

S. Ein Theil.

L. Und was für ein Theil?

S. Der Theil, welchen der Divisor anzeigt.

L. Bey dieser Vorstellung heißt denn dividiren auch nichts anders, als den Theil einer Grösse oder Zahl finden, welchen eine andere gegebene Zahl anzeigt. Allein wenn man nun den Quotienten als ein Ganzes betrachten wollte; was wäre denn wohl der Dividendus?

S. Das Vielfache des Quotienten.

L. Und das Wievielfache?

S. Was der Divisor anzeigte.

L. Dann hiesse also wohl dividiren die Grösse oder Zahl oder das Ganze finden, wovon der Dividendus das Vielfache wäre, was der Divisor anzeigte?

S. Ja.

L. Wenn man also durch 8 dividirt, so ist der Quotient vom Dividendus?

S. Der achte Theil,

L. Und der Dividendus vom Quotienten?

S. Das achtfache.

L.

L. Und wenn man also den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt?

S. So muß das Factum daraus dem Dividendus gleich seyn.

L. Geben also 50 Rthlr. durch 5 dividirt 10 Rthlr.?

S. Ja.

L. Warum?

S. Weil 5x10 Rthlr. = 50 Rthlr. ist.

L. So wie man durch das Zeichen x die Multiplication zweyer Grössen anzeigt, so zeigt man durch zwey übereinander stehende Punkte, oder einen Querstich, welche man zwischen den Dividendus und Divisor setzt, die Division an. Bey den gedachten Punkten aber setzt man den Dividendus vor dieselben, und den Divisor hinter sie; bedient man sich aber des gedachten Striches, so setzt man den Dividendus darüber, und den Divisor darunter. 50 Rthlr. : 5 heißt daher eben so als $\frac{50 \text{ Rthl.}}{5}$ nichts anders als 50 Rthlr. durch 5 dividirt. Was giebt also 24 Rthlr. : 4?

S. 6 Rthlr. weil 6 Rthlr. x 4 = 24 ist.

L. Und $\frac{72 \text{ Rthlr.}}{9}$?

S. Giebt 8 Rthlr., denn 9x8 Rthlr. ist 72 Rthlr.

L. Gesetzt nun, daß wir 72 Rthlr. erst durch 8, dann durch 4, dann durch 2 dividirten; was würden wir für Quotienten erhalten?

S.

S. 9 Rthlr., 18 Rthlr. und 36 Rthlr.

L. Und wenn wir diese Quotienten gegen einander halten, so ist jeder folgende?

S. Grösser als der vorhergehende.

L. Die Divisoren aber, mit welchen wir dividirten, als wir diese Quotienten fanden?

S. Davon ist der folgende immer kleiner, als der vorhergehende.

L. Was folgt daraus?

S. Wenn man den Dividendus unverändert läßt, den Divisor aber kleiner macht, so wird der Quotient grösser, und umgekehrt, wenn man den Divisor grösser macht, so wird der Quotient kleiner. Um dies letzte deutlich zu sehen, darf man nur 72 Rthlr. erst durch 2, dann durch 4 und nun durch 8 dividiren, wo man die Quotienten 36 Rthlr., 18 Rthlr. 9 Rthlr. erhält.

L. Und um den Grund davon zu sehen, hat man auch nur nöthig, sich den Dividendus als eine Summe, die unter verschiedene Personen vertheilt werden soll, vorzustellen, und dabey den Divisor als die Zahl zu betrachten, welche die Menge dieser Personen anzeigt, und den Quotienten endlich als den Theil einer jeden Person.

S. Ja, dann sieht man in der That den Grund davon sehr leicht. Denn wenn eine und dieselbe Summe unter verschiedene Personen vertheilt werden soll, so muß der Theil, den eine jede erhält, desto grösser seyn, unter je weniger, und

desto

desto kleiner unter je mehrere die gedachte Summe ertheilt werden soll.

L. Und wenn eine Summe unter eine gewisse Anzahl hätte vertheilt werden sollen, und man statt dieser Anzahl nachher eine doppelt so grosse nähme? so erhielte ein jeder?

S. Nur halb so viel, als er vorher erhalten haben würde.

L. Und wenn man eine dreymal so grosse Anzahl nähme?

S. Dann erhielte jeder nur den dritten Theil dessen, was er anfänglich zu hoffen hatte, so wie er davon nur den vierten, fünften, sechsten Theil u. s. w. erhalten würde, wenn eine viermal, fünfmal, sechsmal so grosse Anzahl u. s. w. genommen würde.

L. Wie ist es nun umgekehrt, wenn eine Summe, die unter eine gewisse Anzahl von Personen vertheilt werden soll, hinterher nur unter halb so viel, oder unter den dritten, vierten Theil u. s. w. vertheilt wird?

S. Wenn die nachherige Anzahl nur halb so groß ist, so erhält jeder zweymal so viel als vorher; ist sie nur der dritte Theil, so bekömmt jeder dreymal so viel u. s. w.

L. Bey unverändertem Dividendus wächst also nicht nur der Quotient, wenn der Divisor abnimmt, und nimmt ab, wenn der Divisor zunimmt, sondern er wächst in eben dem Maasse, als der Divisor abnimmt, und nimmt auch in eben

eben dem Masse ab, als der Divisor zunimmt. Wie ist es nun, wenn der Divisor unverändert bleibt, und der Dividendus zu oder abnimmt?

S. So wie alsdann der Dividendus wächst, so wächst auch und zwar in eben dem Grade der Quotient, und so wie dann der Dividendus abnimmt, so nimmt auch und zwar in eben dem Grade der Quotient ab. Denn wenn unter eine und dieselbe Anzahl von Personen verschiedene ungleiche Summen vertheilt werden sollen, so muß eine jede von einer grössern Summe mehr als von einer kleinern erhalten, und zwar gerade so vielmal mehr, als die grössere Summe mehr als die kleinere gewesen ist.

L. Wie nun aber, wenn so wohl der Dividendus als der Divisor beyde etweder gleich vielmal vergrössert oder verkleinert würden?

S. Dann bliebe der Quotient unverändert. Denn würde er durch die Veränderung des Divisors vergrössert, so würde er durch die Veränderung des Dividendus eben so vielmal wieder verkleinert, und würde er durch die Veränderung des Divisors verkleinert, so würde er durch die Veränderung des Dividendus um eben so vielmal wieder vergrössert, und bliebe also derselbe.

L. Wie viel ist also $\frac{48}{8}$?

S. 6.

L. Aber $\frac{48}{4}$?

S. 2×6 oder 12.

L. Und $\frac{48}{16}$?

S. $\frac{1}{2}$ von 6 oder 3.

L. Hingegen $\frac{48 \times 2}{8} = \frac{96}{8}$?

S. Ist 12.

L. Und $\frac{\frac{1}{2}\text{ von }48}{8}$?

S. Ist 3.

L. Nun aber $\frac{48 \times 2}{8 \times 2}$?

S. 6.

L. Und $\frac{\frac{1}{2}\text{ von }48}{\frac{1}{2}\text{ von }8}$?

S. Ist auch 6.

L. Welches ist nun wohl der Quotient von $\frac{48\text{ Rthlr. Vermögen?}}{+6}$

S. 8 Rthlr. Vermögen.

L. Wie so?

S. Ob + bey dem Divisor steht oder nicht, das ist einerley; denn das Zeichen + zeigt immer das an, was man sich gedacht haben würde, wenn gar kein Zeichen gesetzt worden wäre. Da nun $\frac{48\text{ Rthlr. Verm.}}{6} = 8$ Rthlr. Verm. ist, so muß auch $\frac{48\text{ Rthlr. Verm.}}{+6} = 8$ Rthlr. Verm. seyn.

L. Aber der Quotient von $\frac{48\text{ Rthl. Verm.}}{-6}$?

S.

S. Ist 8 Rthlr. Schuld. Denn da das Zeichen + beym Divisor anzeigt, daß man nach demselben einen Theil von dem Dividendus selbst finden soll; so muß das Zeichen —, welches immer das Gegentheil von dem bedeutet, was + anzeigt, die Bedeutung haben, daß man nach dem Divisor das Gegentheil des Dividendus theilen solle. Das Gegentheil nun von 48 Rthlr. Vermögen ist 48 Rthlr. Schuld, und diese durch 6 dividirt, so kommt zum Quotienten 8 Rthlr. Schuld.

L. Welches ist also der Quotient aus $\frac{48 \text{ Rthlr. Schuld}}{+6}$?

S. Auch 8 Rthlr. Schuld.

L. Und der Quotient aus $\frac{48 \text{ Rthlr. Schuld}}{-6}$?

S. 8 Rthlr. Vermögen.

L. Warum?

S. Es verhält sich hier wieder so als vorhin. Wenn man 48 Rthlr. Schuld durch + 6 dividiren soll, so ist das eben soviel, als ob 48 Rthl. Schuld durch 6 zu dividiren gegeben wären, und da ist der Quotient 8 Rthl. Schuld, denn hier bestimmt man einen Theil vom Dividendus selbst. Sollen aber 48 Rthlr. Schuld durch — 6 dividiret werden, so ist der 6te Theil des Gegentheils von 48 Rthlr. Schuld anzugeben, und das ist der 6te Theil von 48 Rthlr. Vermögen, oder 8 Rthlr. Vermögen.

L. Vorausgesetzt also, daß sonst weder der Dividendus noch der Divisor eine Veränderung leide; verändert alsdann die Zusetzung der Zeichen + und — zu denselben etwas in der Grösse des Quotienten, oder nur die Art desselben?

S. Die Grösse des Quotienten bleibt dieselbe, und nur die Art desselben wird durch die Zeichen verändert.

L. Wenn also $\frac{48}{6} = 8$ ist, so unterscheiden sich die Quotienten aus $\frac{+48}{+6}$, $\frac{+48}{-6}$, $\frac{-48}{+6}$, $\frac{-48}{-6}$ von dem Quotienten aus $\frac{48}{6} = 8$ allein?

S. Allein dadurch, daß sie entweder das Zeichen + oder das Zeichen — vor sich haben.

L. Welches ist aber der Quotient aus $\frac{+48}{+6}$?

S. + 8.

L. Ferner der Quotient aus $\frac{+48}{-6}$?

S. — 8.

L. Und aus $\frac{-48}{+6}$?

S. — 8.

L. Endlich aus $\frac{-48}{-6}$?

S. + 8.

L. Ist das alles richtig?

S. Ja, denn so oft der Divisor das Zeichen + hat, so oft ist der Dividendus selbst, so oft aber der Divisor das Zeichen — hat, so oft ist das Gegentheil des Dividendus getheilt worden.

L. Sollten Sie wohl im Stande seyn, aus den betrachteten Fällen auf eine ähnliche Art, als wir solches bey der Multiplication gethan haben, eine allgemeine Regel für das Zeichen des Quotienten, wenn der Dividendus und Divisor mit + und — bezeichnet sind, herzuleiten?

S. (Nachdem er eine Zeitlang die erwähnten Fälle überdacht hat.) Ja. Der Quotient hat +, wenn der Dividendus und Divisor einerley Zeichen, und —, wenn der Dividendus und Divisor verschiedene Zeichen haben.

L. Muß das so seyn?

S. Ja. Denn wenn der Dividendus und Divisor einerley Zeichen haben, so ist solches entweder + oder —. Haben beyde +; so muß man von dem Dividendus selbst einen Theil finden, und dem kommt also auch das Zeichen + zu. Haben beyde —; so soll ein Theil von dem Gegentheile des Dividendus gesucht werden, und da der Dividendus mit —, und sein Gegentheil also mit + bezeichnet ist, so muß der gesuchte Theil auch + erhalten. Haben nun aber der Dividendus und Divisor verschiedene Zeichen, so hat entweder der

Dividendus + und der Divisor —, oder es hat der Dividendus —, und der Divisor +. Im ersten Falle muß man das Gegentheil des Dividendus, und in diesem den Dividendus selbst theilen, und in beyden Fällen bekommt der Quotient —.

L. Also geben auch in der Division einerley Zeichen + und verschiedene —. Wenn man sich diese Regel merkt, und dabey das vor Augen hat, was Sie vorhin bemerkten, daß nemlich durch die Zeichen + und — beym Dividendus und Divisor nicht die Grösse des Quotienten, sondern nur die Art desselben geändert werde; so kann man sich die Division der entgegengesetzten Grössen auf die Art erleichtern, daß man erstlich nach der Regel: Einerley Zeichen geben + und verschiedene geben —; das Zeichen des Quotienten bestimmt, und darauf den Quotienten so sucht, als ob der Dividendus und Divisor gar kein Zeichen vor sich hätten. Beurtheilen Sie diese Regel für Sich nach den vorhin betrachteten Fällen. Jetzt zu der Frage: Welches ist der Quotient, wenn man a durch b dividirt?

S. Hier kann man nicht wirklich dividiren, sondern höchstens anzeigen, daß solches geschehen solle.

L. Und wie würden Sie das thun?

S. Entweder so: a: b, oder so: $\frac{a}{b}$.

L.

L. Gesetzt nun ich bemerkte den Quotienten aus $\frac{a}{b}$ mit dem Buchstaben c, daß also $\frac{a}{b} = c$ wäre; welches würde der Quotient aus $\frac{+a}{+b}$ seyn?

S. $+c$.

L. Und der Quotient aus $\frac{+a}{-b}$?

S. $-c$.

L. Ferner der Quotient aus $\frac{-a}{+b}$?

S. $-c$.

L. Und endlich der Quotient aus $\frac{-a}{-b}$?

S. $+c$.

L. Bey diesen allgemeinen Sätzen wollen wir es heute bewenden lassen. In unserer nächsten Unterredung wird unsere Beschäftigung seyn, dieselben anzuwenden, und vermittelst derselben die Regeln uns bekannt zu machen, welche man bey jedem der in der Division möglichen Fälle zu befolgen hat. Ueberdenken Sie für Sich, so viel Sie können, diese Fälle zum voraus, um mich dadurch in den Stand zu setzen, desto kürzer mich fassen zu können; denn das wird nöthig seyn, da wir auch von der Multiplication noch eins und das andere übrig haben, und auch möglich, da ich bey der Multiplication weitläuftig gewesen bin.

Funfzehntes Gespräch.

L. Wenn ich 3 Rthlr. unter zwey Personen vertheilen sollte, wie viel müßte ich einem jeden geben?

S. Einen Thaler und zwölf Groschen.

L. Und wenn ich 13 Gr. unter zwey Personen vertheilen sollte, so bekäme ein jeder?

S. Sechs Groschen und sechs Pfennige.

L. Wenn ich aber 9 Pf. unter zwey Personen vertheilen sollte?

S. Dann bekäme eine jede vier und einen halben Pfennig.

L. Könnte ich aber einer jeden den halben Pfennig auch wirklich geben?

S. Nein, denn wir haben keine halbe Pfennige.

L. Wie viel könnte ich also von 9 Pf. unter zwey Personen wirklich vertheilen, vorausgesetzt, daß jede gleich viel bekommen sollte?

S. 8 Pf.

L. Und von dem übrigen Pfennige könnte ich mir also bloß merken, daß davon eine jede einen halben Pfennig bekommen sollte?

S. Ja.

L. Wenn also 9 Pf. wirklich unter zwey Personen gleich vertheilt werden sollen, so bekommt eine

jede 4 Pf., und behält einen halben Pfennig gut. Wenn aber keine wirkliche Vertheilung vorgenommen, sondern nur bestimmt werden soll, wie groß der Theil einer jeden Person sey; so kann man doch sagen, daß eine jede vier und einen halben Pfennig bekomme?

S. Ja.

L. Heißt das mit Recht dividirt, wenn man den Theil des Dividendus, der durch den Quotienten seiner Grösse nach genau angegeben werden soll, nur so bestimmt, daß man ihn eine Hälfte, ein Drittheil u. s. w. nennt? Oder zeigt man alsdann nur die vorzunehmende Division an?

S. Alsdann zeigt man die Division nur an, hat aber nicht wirklich dividirt.

L. Wie viel bekommt ein jeder, wenn 3 Pf. unter viere zu gleichen Theilen vertheilt werden sollen?

S. Hier kann man gar keine wirkliche Theilung vornehmen, sondern nur sagen, daß ein jeder den vierten Theil von 3 Pf. erhalten müßte, wenn man wirklich theilen könnte.

L. Läßt sich der vierte Theil von 3 Pf. nicht auch noch auf eine andere Art bestimmen?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Mir fällt keine andere Art bey.

L. So oft ein Pfennig unter vier Personen zu vertheilen ist, so ist der Antheil eines jeden?

S. $\frac{1}{4}$ Pfennig.

L. Und wenn also 3 Pf. unter vier Personen zu vertheilen sind, so erhält, oder sollte eine jede erhalten, wie viel $\frac{1}{4}$ Pf.?

S. Drey Viertheil Pfennig.

L. Dies könnte man so schreiben $3 \times \frac{1}{4}$ Pf. nicht?

S. Ja.

L. Oder nach dem, was wir von dergleichen Ausdrücken in der Multiplication gehabt haben, noch kürzer?

S. So: $\frac{3}{4}$ Pf.

L. Welches ist also der Quotient, wenn 5 durch 6 dividirt werden soll?

S. $\frac{5}{6}$. Denn wäre 1 durch 6 zu dividiren, so wäre der Quotient $\frac{1}{6}$; da aber 5 durch 6 zu dividiren sind, so ist nun der Quotient $5 \times \frac{1}{6}$ oder $\frac{5}{6}$.

L. Und der Quotient aus 7 durch 9 dividirt?

S. Ist $\frac{7}{9}$.

L. Betrachten Sie nun die vorhergehenden Fälle insgesammt noch einmal. Sie waren

1. $\frac{3}{2}$ Rthlr. = 1 Rthlr. 12 Gr.
2. $\frac{13}{2}$ Gr. = 6 Gr. 6 Pf.
3. $\frac{9}{2}$ Pf. = $4\frac{1}{2}$ Pf.
4. $\frac{3}{4}$ Pf. = $\frac{3}{4}$ Pf.
5. $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$.
6. $\frac{7}{9} = \frac{7}{9}$, und setzen Sie dazu noch
7. $\frac{8}{2} = 4$ und

8.

8. $\frac{24}{4} = 6$. Wenn wir die hier erhaltenen Quotienten unter einander vergleichen; sind sie wohl insgesammt wahre Quotienten? mit andern Worten: Zeigt ein jeder den gesuchten Theil genau, oder so an, als er bey einer wirklichen Vertheilung des Dividendus unter so viel Personen, als der Divisor anzeigt, in der That gegeben werden kann?

S. Nein, das findet nur bey dem 1ten, 2ten, 7ten und 8ten Falle statt.

L. Und in dem 4ten, 5ten und 6ten Falle, zeigt da der Quotient den Theil einer jeden Person durchaus allgemein an, oder bestimmt er bisweilen auch diesen Theil zum Theil genau und zum Theil allgemein?

S. In dem 4ten, 5ten und 6ten Falle zeigt der Quotient den gedachten Theil durchaus nur allgemein an, in dem dritten aber zum Theil genau und zum Theil allgemein.

L. Wie so?

S. In dem 4ten, 5ten und 6ten Falle bestimmt der Quotient nur, was für einen Theil ein jeder bey einer Vertheilung des Dividendus bekommen könne; in dem 3ten Falle aber wird angezeigt, wie viel erstlich wirklich gegeben werden könne, und dann, was für einen Theil überdem jeder noch gut behalte.

L. Wenn wir diese Verschiedenheiten deutlicher beschreiben wollen, so können wir sagen: Wenn dividirt werden soll, so ist der Dividendus

in Vergleichung mit dem Divisor entweder von der Art, daß er wirklich und genau in so viel Theile, als der Divisor anzeigt, zerlegt, und also auch ein jeder dieser Theile durch den Quotienten genau bezeichnet werden kann; dies findet z. B. statt, wenn 6 Rthlr. durch 2, oder 36 Rthlr. durch 4 zu dividiren gegeben würden, denn 6 Rthlr. lassen sich genau in 2, und 36 Rthlr. auch genau in 4 gleiche Theile theilen: oder es ist der Dividendus von der Art, daß nur ein Theil desselben nach dem Divisor wirklich in gleiche Theile getheilt werden kann, der übrige Theil aber nicht; wie z. B. wenn 9 Pf. durch 4 dividirt werden sollen, denn 8 Pf. lassen sich wirklich in 4 gleiche Theile theilen, der übrige Pf. aber nicht: oder es ist endlich der Dividendus von der Art, daß an gar keine wirkliche Theilung zu denken ist, z. B. wenn 3 Pf. unter 4 Personen gleich zu vertheilen sind. In diesem letzten Falle ist bloß Anzeige der Division, nicht wirkliche Division möglich. Und nun zu den Regeln, nach welchen man in jedem der beschriebenen Fälle verfährt. Um von dem letzten Falle anzufangen, so findet derselbe nur alsdann statt, wenn der Dividendus keine so grosse Menge von zu vertheilenden Dingen enthält, als nach dem Divisor Personen da sind, welche daran Antheil haben sollen. Allgemein bestimmt man alsdann, wie solches aus den vorhin betrachteten Fällen erhellt, den Theil eines jeden

durch

durch den Quotienten so, daß man den Dividendus über den Divisor setzt, beyde durch einen Querstrich unterscheidet, und diesen Ausdruck nach seiner bekannten Bedeutung nimmt. Also ist, wenn 9 Pf. unter 13 Personen gleich zu vertheilen sind, der Antheil eines jeden?

S. $\frac{9}{13}$ Pf.

L. Und also der Quotient aus 9 Pf. durch 13 dividirt?

S. $\frac{9}{13}$.

L. Und 17 durch 19 dividirt giebt also?

S. $\frac{17}{19}$.

L. Wie aber, wenn 2 Rthlr. unter 3 Personen zu vertheilen wären, oder 3 Rthlr. durch 2 dividirt werden sollten?

S. Dann wäre der Quotient $\frac{2}{3}$ Rthlr.

L. Sind nicht 2 Rthlr. soviel als 48 Gr.

S. Ja.

L. Und ob man also 2 Rthlr. oder ob man 48 Gr. durch 3 dividirt, solches ist doch völlig gleich?

S. Ja.

L. Welches ist aber im letzten Falle der Quotient?

S. 16 Gr.

L. Gehört also der Fall, wenn 2 Rthlr. durch 3 dividirt werden sollen, auch zu denen, bey welchen der Quotient den zu bestimmenden Theil auch nur allgemein angiebt?

S.

S. So bald man anstatt 2 Rthlr., 48 Gr. setzt, nicht.

L. Soll also der jetzt betrachtete Fall im strengen Verstande genommen da seyn, und man nach der angeführten Regel mit Recht handeln, so muß der Dividendus von der Art überdem seyn, daß man ihn nicht in einen andern verwandeln kann, bey welchem die Anzahl der zu vertheilenden Dinge grösser als die Anzahl der Personen ist, unter welche nach dem Divisor die Vertheilung geschehen soll. Wenn kann aber diese Verwandlung statt finden?

S. Wenn der Dividendus zu einer Ordnung gehört, die andere niedere Ordnungen unter sich hat.

L. Oder auch, denn das ist einerley, Grössen von einem Grade enthält, die in Grössen eines niedern Grades verwandelt werden können?

S. Ja, denn Thaler und Groschen sind z. B. Grössen von verschiedenen Graden, und da diese sich nicht in der Art, sondern nur in der Grösse unterscheiden, so können sie in einander verwandelt werden.

L. Nun stellen Sie Sich vor, daß Sie 5412 Rthlr. unter vier Personen vertheilen sollten, und zugleich, daß Sie die gedachte Summe so zu liegen hätten, daß die 5000 Rthlr. in 5 Beuteln, jeder zu 1000 Rthlr. die 400 Rthlr. in 4 Beuteln jeder zu 100 Rthlr., die 10 Rthlr. in einer Rolle, und

die

die 2 Rthlr. einzeln wären. Wie würden Sie unter diesen Umständen die Vertheilung vornehmen?

S. Ich gäbe zuerst von den 5 tausend Thaler Beuteln einem jeden einen, und machte aus dem noch übrigen 10 hundert Thaler Beutel, oder stellte mir auch nur vor, daß daraus 10 solche Beutel gemacht werden könnten. Da ich auf diese Art 14 mal hundert Thaler hätte, so gäbe ich nun davon wieder einem jeden 300 Rthlr., und behielte also 200 Rthlr. oder 20 mal 10 Rthlr. übrig. Von diesen 20 mal 10 Rthlr. und der 10 Rthlr. Rolle erhielte ferner ein jeder 5 mal 10 Rthl., und von den noch übrigen 10 Rthlr. und 2 Rthlr. bekäme ein jeder 3 Rthlr., so daß also der ganze Antheil eines jeden 1353 Rthlr. wäre.

L. Gesetzt aber, daß Sie dieselbe Summe unter 6 Personen vertheilen sollten, nähmen Sie alsdann auch anfänglich bloß die tausend Thaler Beutel?

S. Nein, dann stellte ich mir die 5000 und 400 Rthlr. zusammen als 54 hundert Thaler vor, und gäbe davon einem jeden 900, und darauf von den übrigen 12 Rthlr. noch 2 Rthlr.

L. Sind Sie im Stande mit einem Male den Theil zu finden, den ein jeder erhält, wenn 5412 Rthlr. unter 4 oder 6 Personen vertheilt werden sollen?

S. Nein, sondern ich muß denselben nach und nach suchen.

L. Sie stellen Sich daher die zu vertheilende Summe selbst als aus Theilen zusammen gesetzt vor, und vertheilen einen dieser Theile nach dem andern. Von was für Theilen aber fangen Sie die Theilung an? von den grössern oder von den kleinern?

S. Von den grössern.

L. Und was machen Sie, wenn nach der Vertheilung eines dieser grössern Theile etwas übrig bleibt?

S. Dann verwandele ich den Rest und nehme ihn mit dem folgenden kleinern Theile zusammen.

L. Wie dividiren Sie 5412 durch 4? *)

S. So:

```
 12
5412 | 1353.
4444
```

L. Verfahren Sie nicht hier um den Quotienten zu finden, auf eine ähnliche Art, als vorhin, da Sie den Antheil suchten, den eine jede von 4 Personen, unter welche 5412 Rthlr. zu gleichen Theilen vertheilt werden sollten, daran hatte?

S. Ja, denn ich gehe auch hier theilweise, fange von dem größten Theile des Dividendus an, und

*) Diejenigen, welche das zunächst folgende nicht weitläuftig genug aus einander gesetzt finden sollten, verweise ich auf die Anmerkung am Ende dieser Anleitung zur Arithmetik, in welcher ich die Art und Weise, die Division einem Kinde, welches davon noch gar nichts gelernt, beyzubringen, erklärt habe. Hier mußte ich mich kurz fassen.

und wenn etwas übrig bleibt, so nehme ich solches mit dem zunächst folgenden kleinern Theile zusammen.

L. Ist Ihnen nicht etwa noch eine andere Art zu dividiren bekannt?

S. Nein.

L. Wie dividiren Sie also 129140163 durch 729?

S. So

```
      1 5
     53362
     72041
    687546
   5721720
  129140163 | 177147.
   72999999 |
    722222
     7777
```

L. Wie gefällt Ihnen diese Art?

```
729 | 129140163 | 177147.
       5721720
        687546
         72041
         53362
          1 5
```

S. (Nachdem er dieses Exempel sorgfältig mit dem vorhergehenden verglichen hat.) Bey dieser Art erspart man sich das öftere Schreiben des Divisors, indem man denselben nur einmal hinsetzt. Uebrigens

gens aber scheint weiter kein Unterschied zwischen dieser und der vorhergehenden Art statt zu finden, als daß hier die Zahlen unterwärts geschrieben sind, die bey der ersten Ausrechnung oberhalb des Dividendus gesetzt wurden.

L. Sie urtheilen ganz richtig, und man nennt auch diese Art unterwärts dividiren, so wie jene oberwärts dividiren heißt. Es giebt Fälle, wo es bequemer ist unterwärts zu dividiren, und deswegen müssen Sie Sich diese Art ebenfalls geläufig zu machen suchen. Etwas mehr Aufmerksamkeit verlangt sie als die vorhergehende Art, indem der Divisor nicht unter dem Theile des Dividendus steht, aus welchem man den Quotienten sucht. Leichter als beyde Arten aber sind folgende.

1.	729.	129140163	—177147
2.	1458.	729	
3.	2187.	5624	
4.	2916.	5103	
5.	3645.		
6.	4374.	5210	
7.	5103.	5103	
8.	5832.	1071	
9.	6561.	729	
		3426	
		2916	
		5103	
		5103	
		0	

Man

Man macht hier von dem Divisor das 2fache, das 3fache, das 4fache, das 5fache u. s. w. bis zum 9fachen desselben, und setzt solches, wie das Exempel zeigt. Dann nimmt man von dem Dividendus einen Theil, der nicht größer ist, als daß sich entweder der Divisor selbst, oder eins der von ihm gemachten Vielfachen von ihm abziehen läßt, setzt solches darunter, zieht es von dem genommenen Theile des Dividendus ab, und bemerkt in der Stelle des Quotienten, das Wievielfache man abgezogen habe. Zu dem Reste setzt man darauf die folgende Zahl des Dividendus, und untersucht, was für ein Vielfaches sich nun wieder abziehen lasse. Dieses setzt man unter den gedachten Rest und die dazu genommene folgende Zahl des Dividendus, zieht es davon ab, und bemerkt abermals in der Stelle des Quotienten, was für ein Vielfaches abgezogen worden sey. Zu dem Reste setzt man nun von neuem die folgende Zahl des Dividendus, und verfährt auf eine ähnliche Art, bis man den ganzen Quotienten gefunden hat.

S. Wenn diese Art nicht so weitläuftig wäre, so wäre sie sehr gut, denn man kann sich dabey nicht leicht irren.

L. Vielleicht gefällt Ihnen also folgende Art.

```
729|129140163|177147
    729
    ----
    5624
    5103
    -----
     5210
     5103
     -----
      1071
       729
      -----
       3426
       2916
       -----
        5103
        5103
        ----
           0
```

welche von der vorhergehenden nur darin unterschieden ist, daß man nicht zum voraus alle Vielfachen des Divisors nach den eintheiligen Zahlen sucht.

S. Etwas kürzer ist sie wenigstens, und man kann sich dabey doch mehr vor Fehlern hüten, als bey den beyden ersten Arten.

L. Insbesondere wäre wohl der Vortheil in Anschlag zu bringen, daß man hier sich eher helfen kann, wenn man bisweilen den Quotienten zu groß angenommen hat. Denn gesetzt, daß man zum zweyten Theile des Quotienten 8 statt 7 genommen hätte, und also das Exempel so stünde;

```
729|129140163|18
   | 729
   ------
     5624
     5832
```

so wüßte man doch, wenn man nun 7 statt 8 nehmen wollte, mit Gewisheit noch, was man für einen Theil des Dividendus zu dividiren hätte, nemlich 5624; allein wenn man so rechnet

```
   6
  572
129140163|18
  7299
   72
```

und in der Mitte der Rechnung merkt, daß man zu viel im Quotienten genommen hat, so ist es viel schwerer zu finden, welche von den bereits ausgestrichenen Zahlen wieder gelten sollen. Demohnerachtet aber kann ich Ihnen nicht rathen, diese letzte Art etwa allein, und also auch allenthalben, zu gebrauchen. Denn wenn man mit Aufmerksamkeit rechnet, so kann man, insbesondere bey einiger Uebung, auch bey den beyden ersten Arten Irrthümer vermeiden. Gut wird es aber seyn, wenn Sie in allen Arten eine Fertigkeit zu erlangen suchen, denn bald ist die eine, bald die andere Art die vortheilhafteste, wie Sie in der Folge oft zu bemerken Gelegenheit haben werden. Gesetzt nun

 aber,

aber, daß Sie ein Divisionsexempel gerechnet hätten, und gerne mit voller Gewisheit wissen wollten, ob Sie ohne Fehler gerechnet hätten; wie würden Sie das zu erfahren suchen?

S. Nun Sie mich verschiedene Arten zu dividiren gelehrt haben, würde ich das Exempel noch auf eine andere Art ausrechnen, und wenn ich denselben Quotienten erhielte, annehmen, daß ich richtig gerechnet hätte.

L. Dieser Weg ist nicht zu verwerfen, allein es giebt noch einen andern, davon Ihnen wenigstens der Grund bekannt ist. Ist nicht der Dividendus immer ein Vielfaches von dem Quotienten?

S. Ja, und zwar das Vielfache, welches der Divisor anzeigt.

L. Und wenn man also den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, so muß das Factum dem Dividendus gleich seyn; nicht?

S. Ja, und also kann man auch den Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und wenn das Factum daraus dem Dividendus gleich ist, so ist der Quotient richtig gefunden.

L. Ist also $\frac{129140163}{729} = 177147$?

S.

S. Ich will sehen. Ich multiplicire also

$$\begin{array}{r} 177147 \\ \text{mit} \quad 729 \\ \hline 1594323 \\ 354294 \\ 1240029 \\ \hline 129140163. \end{array}$$

Ja es ist $\frac{129140163}{729} = 177147$, weil $177147 \times 729 = 129140163$ ist.

L. Sie werden Sich nun auch wohl erinnern, daß wir schon denselben Weg gegangen sind, um uns von der Richtigkeit gefundener Quotienten zu überzeugen. Es bleibt aber bisweilen nach der Division etwas übrig, und in diesem Falle müssen Sie zu dem Factum aus dem Quotienten und dem Divisor diesen Rest noch addiren. Dividiren Sie z. B. 4783768 durch 2187.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{ll} \quad 11(7 & \\ \quad 228 & \\ 1364 & \\ 2931(9 & \\ 40164 & \\ 52900(9 & \\ 4783768 & 2187 \\ 2187777 & \\ \quad 21888 & \\ \quad\; 211 & \\ \quad\;\; 2 & \end{array}$$

S.

Hier ist der Quotient 2182 und der Rest 799.

L. Wie machen Sie nun die Probe?

S. Ich multiplicire 2187
mit 2187

```
   2187
   2187
-------
  15309
 17496
 2187
4374
-------
4782969
    799
-------
4783768
```

und addire dazu 799

L. Nun noch eins. Wenn Sie mit einem eintheiligen Divisor dividiren sollen, so müssen Sie im Stande seyn, den Quotienten zu finden, ohne weiter etwas als diesen Quotienten aufzuschreiben. Es ist solches bey einiger Uebung leicht möglich, indem man doch immer nur wenige Zahlen im Sinne zu behalten braucht. Aber wie viel besser ist es, ein Exempel, wie folgendes $\frac{59049}{9}$ so auszurechnen, daß man gleich schreibt $\frac{59049}{9} = 6561$, als so zu verfahren, wie hier geschehen.

```
 88
59049 | 6561.
 9999 |
```

Ueben

lleben Sie Sich daher hierin, zumal da diese Verkürzung künftig Ihnen noch wichtiger werden wird, als sie Ihnen jetzt schon scheinen kann. Ja es ist so gar gut, wenn Sie mit verschiedenen zweytheiligen Zahlen z. E. 12, 24 u. dgl. eben so zu dividiren Sich gewöhnen, welches leicht ist, wenn man nur weiß, wie groß das Factum aus diesen Zahlen und einer jeden eintheiligen Zahl ist. Soll ich z. B. 584868 durch 12 dividiren, so schreibe ich

$$\frac{584868}{12} = 48739,$$ und rechne

nicht, wie Sie

xxxx
x0840
584868 | 48739.
xxxxxx
xxxx

Doch künftig mehr hiervon, wenn Sie nemlich die Ihnen jetzt gegebenen Winke sorgfältig benutzt haben werden.

Sechszehntes Gespräch.

L. Nun wollen wir sehen, wie wir uns zu verhalten haben, wenn der Dividendus, oder der Divisor, oder auch beyde, Zahlen der niedern Ordnungen enthalten. Sie werden Sich sehr leicht hier helfen, wenn Sie jedesmal den Quotienten erst so suchen, als ob der Dividendus und Divisor keine Zahlen der niedern Ordnungen enthielten, und dann den Quotienten, der so entweder zu groß oder zu klein ist, nach schon bekannten Regeln gehörig wieder verkleinern oder vergrössern. Einige Exempel werden Ihnen alles deutlich machen, und Sie darauf auch im Stande seyn, das hier nöthige Verfahren Sich noch zu erleichtern. Was kommt, wenn man 43296 durch 32 dividirt?

S. (Rechnet und giebt darauf den Quotienten 1353 an.)

32|43296|1353.
116
21
1

L. Was würde aber für ein Quotient herausgebracht werden, wenn man 432,96 durch 32 dividirt hätte?

S. 13,53.

L. Wie so?

S. Der Quotient von 43296 durch 32 dividirt ist 1353. Da nun 432,96 hundertmal kleiner ist als 43296, so muß auch der Quotient aus $\frac{432,96}{32}$ hundertmal kleiner seyn als der Quotient aus $\frac{43296}{32}$, und ist also 13,53.

L. Und der Quotient aus $\frac{4,3296}{32}$?

S. Ist 0,1353, aus einem ähnlichen Grunde?

L. Gesetzt also, daß bloß der Dividendus Zifern der niedern Ordnungen enthält, wie viel Zifern dieser Ordnungen bekömmt alsdann der Quotient?

S. Eben so viel.

L. Wie leicht also in diesem Falle die Division ist. Man braucht anfänglich gar nicht darauf zu sehen, ob Zehntheiler im Dividendus sind; man sucht den Quotienten, als ob dergleichen gar nicht vorhanden wären: schneidet aber darin am Ende so viel Stellen für die Zehntheiler ab, als im Dividendus Stellen damit angefüllt waren. Da also $\frac{1291401633}{729} = 1771147$ ist, so wird $\frac{1291,401633}{1729}$ seyn?

S. 1,77147.

L. Welches ist nun aber der Quotient aus $\frac{43296}{3,2}$?

S. Dieser muß zehnmal grösser seyn, als 1353 oder der Quotient aus $\frac{43296}{32}$; denn wenn der Divisor kleiner wird, so wird, und zwar in eben dem Maasse, der Quotient grösser. Er ist also 13530.

L. Und der Quotient aus $\frac{43296}{0,32}$?

S. Ist 135300.

L. Wie verhält man sich also, wenn bloß der Divisor Zehntheiler enthält?

S. Man dividirt anfänglich, als ob keine Zehntheiler da wären; hängt aber darauf dem Quotienten so viel Nullen an, als im Divisor Stellen mit Zehntheilern angefüllt waren.

L. Also ist der Quotient aus $\frac{129140163}{7,29}$?

S. 17714700.

L. Und der Quotient aus $\frac{129140163}{0,00729}$?

S. 17714700000.

L.

L. Auch dieser Fall ist nicht schwer. Allein nun suchen Sie den Quotienten aus $\frac{1291401,63}{0,729}$. Welches wird der seyn?

S. Der Quotient aus $\frac{129140163}{729}$ ist 177147. Da in $\frac{1291401,63}{0,729}$ zwey Zehntheiler im Dividendus sind, so sollte der Quotient auch so viel haben. Allein im Divisor sind drey Zehntheiler, und folglich müssen drey Nullen angehängt werden. Ich lasse also lieber gleich die zwey Zehntheiler weg, und hänge nur eine Null an, und folglich ist $\frac{129140,63}{0,729} = 1771470$.

L. Noch deutlicher ist es vielleicht, wenn Sie erst drey Nullen anhängen, und dann wieder zwey für die Zehntheiler abschneiden, oder dieselben ganz weglassen, denn das ist bekannter Maassen einerley. So ist $\frac{129140163}{729} = 177147$, und $\frac{129140163}{0,729} = 177147000$, und $\frac{1291401,63}{0,729} = 1771470,00 = 1771470$.

S. Ja, so ist es leichter.

L.

L. Welches ist denn nun wohl der Quotient aus $\frac{12914,0163}{7,29}$?

S. 1771,47.

L. Wie so?

S. Der Quotient aus $\frac{129140163}{729}$ ist 177147, der Quotient aus $\frac{129140163}{7,29}$ aber 17714700, und der Quotient aus $\frac{1291,40163}{7,29}$ also 1771,4700 oder 1771,47.

L. Wie verfahren Sie also, wenn sowohl der Dividendus als der Divisor Zehntheiler enthalten?

S. (Nach Ueberlegung der da gewesenen Fälle.) Ich suche zuvörderst den Quotienten, als ob keine Zehntheiler da wären. Dann ziehe ich die kleinere Anzahl der mit Zehntheilern angefüllten Stellen von der grössern ab, und schneide, wenn der Dividendus die grössere Anzahl enthält, so viel Stellen, als der Rest anzeigt, im Quotienten für die Zehntheiler ab; wenn aber der Divisor mehr Zehntheiler hat, so setze ich eben so viel Nullen an. In $\frac{1291401,63}{0,729}$ sind im Dividendus 2, im Divisor aber 3 Zehntheiler. Hier setze ich also

zu

zu 177147 ein Null hinzu. In $\frac{1291,40163}{7,29}$ hingegen sind im Dividendus 4 und im Divisor 2 Zehntheiler; hier schneide ich daher in 177147 2 Stellen für die Zehntheiler ab.

L. Wie wird es also seyn, wenn der Dividendus und Divisor gleich viel Zehntheiler enthalten?

S. (Nach einigen Nachdenken.) Dann suche ich den Quotienten so, als ob weder im Dividendus noch im Divisor Zehntheiler stünden.

L. Ohne hinterher den gefundenen Quotienten im geringsten abzuändern?

S. Ja; denn wenn der Dividendus und Divisor gleich viel Zehntheiler enthalten, so nimmt man, wenn man darauf, daß sie dergleichen enthalten, nicht achtet, beyde gleich viel Mal grösser an, und das ändert im Quotienten nichts.

L. Sind wohl folgende zwey Zahlen verschieden, 8 nemlich und 8,00000?

S. Nein, denn die eine sowohl als die andere gilt achte.

L. Welches ist der Quotient von 8 durch 9 dividirt?

S. $\frac{8}{9}$.

L. Aber von 8,00000 durch 9 dividirt?

S. Der Quotient von 800000 durch 9 dividirt ist 88888 und 8 Rest, und also $\frac{8,00000}{9}$ = 0,88888 nebst dem gedachten Reste.

L.

L. Was sind denn wohl eigentlich die übrig bleibenden 8? Sind es Einer?

S. Nein, sondern Hunderttausendtheile.

L. Und zwar 8 Hunderttausendtheile, die noch mit 9 dividirt werden sollten?

S. Ja.

L. Gesetzt, daß von Thalern die Rede wäre, würde man da wohl $\frac{8}{9}$ Hunderttausendtheile, welche noch nicht einmal 1 Zehntausendtheil ausmachten, zu achten haben?

S. Nein.

L. In diesem Falle wäre also 0,88888 freylich noch nicht ganz genau der Quotient von $\frac{8}{9}$; allein das, was fehlte, wäre zu wenig, als daß man darauf zu achten nöthig hätte, und man könnte also 0,88888 schon als den wahren Quotienten betrachten. Nun dividiren Sie einmal 24,000000 durch 14, welches eben soviel ist, als ob Sie 24 durch 14 dividirten.

S. (Rechnet.)

```
14 | 24,000000 | 1,714285
   | 10 26428
      3 12243
          1 1
```

L. Hier haben Sie den Quotienten bis auf die Milliontheile gefunden, und wenn Sie ihn noch weiter hätten finden wollen, so hätten Sie nur noch mehr Nullen anzuhängen nöthig gehabt.

Divi-

Dividiren Sie z. E. 24,00000000000000 durch 14.

S. (Rechnet.)

14|24,00000000000000|1,71428571428571
   1026428326428326
    31224 31224 3 1
       1 1   1 1

L. Bemerken Sie hier, wie im Quotienten die Zifern 714285 immer wieder kommen. Es geschieht dies allezeit, so bald der bey der Division übrig bleibende Rest einem vorhergehenden gleich ist und darauf lauter Nullen folgen. Nach dem ersten Abziehen z. B. bleiben hier 10 übrig, und nach dem siebenten Abzuge findet derselbe Rest statt. So bald sich daher dieses trifft, hat man nicht einmal nöthig, die Division weiter fortzusetzen, sondern man kann sogleich die fernern Zifern des Quotienten hinschreiben. Dividiren Sie nun 60 durch 7, so daß Sie den Quotienten ebenfalls in Zehntheilern suchen.

S. Wie viel Nullen muß ich denn aber anhängen?

L. Hängen Sie fürs erste achte an.

S. (Rechnet.) 7|60,00000000|8,571428
                451326

Nun habe ich nicht weiter nöthig zu dividiren; denn nun sage ich wieder, 7 in 60 habe ich 8 mal,

8 mal, wie im Anfange, und der Quotient ist also 8,571428571428571 u. s. w.

L. Nun dividiren Sie auch noch 3 durch 4, und hängen Sie 5 Nullen an.

S. (Rechnet.) 4|3,00000|0,75
2

Hier hätte ich nur zwey Nullen nöthig gehabt, denn es ist gleich, ob ich 0,75 oder 0,75000 schreibe.

L. Wie viel Nullen man jedesmal anhängen müsse, das hängt von den Umständen ab, insbesondere davon, bis zu was für Zehntheilern man den Quotienten suchen will. Man hat aber auch nicht nöthig, gleich vom Anfang an Nullen anzuhängen, sondern man kann solches nach und nach thun, wie z. B. hier

24|563|23,45833
1810
13400
11480
280
28

und dies ist ohnstreitig das beste, indem man sonst oft, wie wir auch schon einige Fälle gehabt haben, mehr Nullen hinsetzt, als nöthig sind. Diese Art den Quotienten zu finden nennt man nun die Division durch die Näherung, und wir werden davon in der Folge oft Gebrauch machen. Itzt zu der

der Division der zusammengesetzten Zahlen. Welches ist der Quotient, wenn Sie 4x6 durch 4 dividiren?

S. 6.

L. Und wenn Sie 4x6 durch 6 dividiren?

S. 4.

L. Wenn also der Dividendus ein Product ist, und einer seiner Factoren dem Divisor gleich ist, so ist der Quotient?

S. Der andere Factor.

L. Also ist $\frac{ab}{a}$?

S. Gleich b.

L. Und $\frac{ab}{b}$?

S. Gleich a.

L. Gesetzt nun, daß der Divisor ein Product ist, so hat derselbe die Bedeutung, daß der Dividendus mit dem einen Factor des Divisors, der Quotient daraus mit dem zweyten Factor u. s. w. dividirt werden solle. Dies vorausgesetzt, so werden Sie mir leicht sagen, welches der Quotient von $\frac{4x6x8}{4x6}$ sey?

S. 8; denn $\frac{4x6x8}{4} = 6x8$, und $\frac{6x8}{6} = 8$.

L. Und der Quotient aus $\frac{abcde}{abc}$?

S. Ist de; denn $\frac{abcde}{a} = bcde$, und $\frac{bcde}{b} = cde$, und $\frac{cde}{c} = de$.

L. Was geht also durch die Division für eine Veränderung vor, wenn der Dividendus und Divisor Producte sind?

S. Die Factoren, welche beyde gemeinschaftlich haben, fallen weg.

L. Gesetzt aber, daß beyde auch Factoren enthalten, die verschieden sind?

S. Dann merkt man von diesen an, daß sie durch einander dividirt werden sollen.

L. Also ist der Quotient aus $\frac{4 \times 6 \times 8}{4 \times 7}$?

S. $\frac{6 \times 8}{7}$.

L. Und der Quotient aus $\frac{abcd}{abf}$?

S. $\frac{cd}{f}$.

L. Endlich der Quotient aus $\frac{aaa}{aa}$?

S. Ist a.

L.

L. Das bisherige enthält alles, was wir nöthig haben, um nun auch die Division mit Buchstaben zu verrichten, wenn der Dividendus und der Divisor vieltheilig sind. Man verrichtet nemlich hier die Division, eben so als bey mehrtheiligen Zahlen, theilweise, und ausser dem, was die Buchstaben und die Zeichen besonders nöthig machen, auch durchaus nach denselben Regeln. Folgendes Exempel soll Ihnen alles deutlich machen. Gesetzt daß $24aa+22ab-56ac-30bb+42bc$ durch $8a-6b$ dividirt werden sollte; so setzt man zuvörderst den Dividendus und Divisor wie bey den Zahlen auf, schreibt also

$$8a-6b|24aa+22ab-56ac-30bb+42bc|$$

und sucht dann den Quotienten aus einem Theile des Dividendus und des Divisors, hier aus $\frac{24aa}{8a}$, $=3a$. Man sieht hiebey zuerst auf die Zeichen, und handelt nach der Regel: Einerley Zeichen geben +, verschiedene aber −; dann dividirt man die Zahlen nach den bekannten Regeln, und endlich die Buchstoben nach dem, was so eben da gesen. Den gefundenen Theil des Quotienten setzt man nun an seinen Ort, multiplicirt mit ihm den ganzen Divisor, schreibt das Factum daraus unter die gleichnamigen Theile des Dividendus und zieht es von dem Dividendus ab, oder sucht vielmehr

den Unterschied zwischen beyden. Hier ist alles geschehen.

$$\begin{array}{r|l|l} 8a - 6b & 24aa + 22ab - 56ac - 30bb + 42bc & 3a \\ & \underline{24aa - 18ab} & \\ & \quad + 40ab - 56ac - 30bb + 42bc. & \end{array}$$

Nun sucht man von neuem aus einem Theile dieses Restes und dem vorhin genommenen Theile des Divisors, hier aus $\frac{+40ab}{8a}$, einen Theil des verlangten Quotienten, welcher $+5b$ ist. Diesen setzt man neben den vorhin gefundenen Theil des ganzen Quotienten, multiplicirt auch mit ihm den ganzen Divisor, schreibt das Factum unter die gleichnamigen Theile des gedachten Restes, und sucht beyder Unterschied. Hier sehen Sie solches gethan

$$\begin{array}{r|l|l} 8a - 6b & 24aa + 22ab - 56ac - 30bb + 42bc & 3a + 5b \\ & \underline{24aa - 18ab} & \\ & \quad + 40ab - 56ac - 30bb + 42bc & \\ & \quad \underline{+ 40ab \qquad\quad - 30bb} & \\ & \qquad\quad - 56ac \qquad\quad + 42bc. & \end{array}$$

Mit diesem Reste verfährt man nun wieder eben so als vorhin, daß also das ganze Exempel folgendes wird

$$\begin{array}{r|l|l} 8a - 6b & 24aa + 22ab - 65ac - 30bb + 42bc & 3a + 5b - 7c \\ & \underline{24aa - 18ab} & \\ & \quad + 40ab - 56ac - 30bb + 42bc & \\ & \quad \underline{+ 40ab \qquad\quad - 30bb} & \\ & \qquad\quad - 56ac \qquad\quad + 42bc & \\ & \qquad\quad \underline{- 56ac \qquad\quad + 42bc} & \\ & \qquad\qquad\qquad 0. & \end{array}$$

S.

S. Also ist die Division mit Buchstaben doch so schwer nicht, als ich sie mir vorgestellt habe. Lassen Sie mich jetzt ein Exempel rechnen.

L. Sehr gerne. Dividiren Sie also 8aaa — bbb durch 2a — b.

S. (Rechnet)

$$
\begin{array}{l|l|l}
2a - b & 8aaa - bbb & 4aa + 2ab + bb \\
 & 8aaa - 4aab & \\
\hline
 & + 4aab - bbb & \\
 & + 4aab - 2abb & \\
\hline
 & + 2abb - bbb & \\
 & + 2abb - bbb & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

L. Ich dachte nicht, daß Sie hier sogleich Sich zu finden wissen würden, indem die Theile des Factums aus dem Quotienten und Divisor nicht alle gleichnamige Theile im Dividendus haben. Aufhalten kann indeß dies nicht, so bald man die Regeln der Bestimmung des Unterschiedes gehörig inne hat. Welches ist denn nun aber wohl der Quotient aus $\frac{a^6}{a^4}$?

S. (Nach einigem Nachdenken.) a^2; denn $\frac{a^6}{a^4}$ ist soviel als $\frac{aaaaaa}{aaaa}$, und daraus ist der Quotient aa oder a^2.

L. Und der Quotient aus $\frac{a^5}{a^7}$?

S. a^{-2}

L. Wie so?

S. Es ist $\frac{a^5}{a^7} = \frac{aaaaa}{aaaaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$.

L. Wie verrichtet man also die Division, wenn der Dividendus und Divisor gleichartige Dignitäten sind?

S. Man zieht den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus ab, und macht den Rest zum Logarithmen der Wurzel. Soll z. B. a^6 durch a^4 dividirt werden, so ziehe ich 4 von 6 ab, und den Rest 2 schreibe ich als den Logarithmen neben die Wurzel a, so daß also a^2 der Quotient von $\frac{a^6}{a^4}$ wird.

L. Dividiren Sie nun $12a^6 - 15a^3b^4 -$ $16a^3b^2 - 20b^6$ durch $3a^3 - 4b^2$.

S. (Rechnet.)

$$3a^3 - 4b^2 \mid 12a^6 - 15a^3b^4 - 16a^3b^2 - 20b^6 \mid 4a^3 - 5$$
$$12a^5 \qquad - 16a^3b^2$$
$$- 15a^3b^4 \qquad - 20b^6$$
$$- 15a^3b^4 \qquad - 20b^6$$
$$0.$$

L. Was erhält man also, wenn man 16te Dignität einer Zahl mit der 9ten gleicharti[gen] dividirt?

S. Die 7te Dignität derselben Zahl.

L. Und wenn man die 8te Dignität einer Zahl mit der 12ten gleichartigen Dignität dividirt?

S. Die vierte, aber mit einem negativen Logarithmen.

L. Oder 1 durch die 4te Dignität derselben Zahl dividirt?

S. Ja.

L. Nehmen Sie nun wieder die Dignitätenreihen von 2 und 3 (S. 257) die wir schon bey der Multiplication gehabt haben, zur Hand, und sagen Sie mir, was für Dignitäten von 2 dividirt werden, wenn man 16777216 durch 8192 dividirt?

S. Die 24te durch die 13te.

L. Und der Quotient wird also seyn?

S. Die 11te Dignität oder 2048. — Also kann man sich durch dergleichen Dignitätenreihen auch die Division erleichtern, und vermittelst der Subtraction den Quotienten finden?

L. Allerdings; man sucht nemlich in denselben die Logarithmen des Dividendus und des Divisors auf, zieht den letztern von dem erstern ab, und dann sucht man die Zahl, wovon dieser Rest der Logarithme ist. Noch ein Paar Exempel zur Erläuterung. Welches ist also der Quotient aus

$\frac{4194304}{512}$?

S. 4096; denn der Logarithme von 4194304 ist 21, der Logarithme von 512 aber 9, beyder Unterschied also 12, und 12 ist der Logarithme von 4096.

L. Aber der Quotient von $\frac{8192}{65536}$?

L. Ist $\frac{1}{8}$; denn der Logarithme von 8192 ist 13, der Logarithme von 65536 aber 16, beyder Unterschied also — 3, weil der Subtrahendus grösser als der Divisor ist, und der Quotient aus $\frac{8192}{65536}$ ist also 2^{-3} oder $\frac{1}{2^3}$ oder $\frac{1}{8}$.

L. Nun noch eine Anwendung dessen, was wir von der Division durch Producte gehabt haben, zur Erleichterung verschiedener Fälle der Division. Ich habe Ihnen gesagt, daß durch ein Product dividiren nichts anders heisse, als nach und nach mit den Factoren desselben die Division verrichten. Da es nun völlig einerley ist, ob man mit einer Zahl, die als ein Product betrachtet werden kann, selbst, oder ob man mit den Factoren, woraus sie zusammen gesetzt ist, dividirt; so kann man dies letztere statt des erstern wählen, wenn man es vortheilhaft findet. Vortheilhaft aber ist es sehr oft, wenn die Factoren lauter eintheilige Zahlen sind, und man in der Division durch dergleichen Zahlen sich die Fertigkeit erworben hat, die ich Ihnen neulich beschrieben habe. Dividiren Sie z. B. 4624656 durch 48.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{l} 48|4624656|96347 \\ \quad 10662 \\ \quad 3646 \\ \quad\ 12 \end{array}$$

L. Statt dessen dividire ich, da $48 = 6 \times 8$,
$\overline{4624656}$ erst durch 6, und
den Quotienten $\overline{770776}$ von neuem durch 8,
und erhalte so 96347 zum gesuchten Quotienten aus $\frac{4624656}{48}$.

S. Diese Art zu dividiren gefällt mir sehr und ich werde sie daher oft anbringen. Schwer ist sie nicht, und es kommt vorzüglich nur darauf an, daß man weiß, ob der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist, und daß man nicht lange nöthig hat, die Factoren derselben zu suchen.

S. Ich werde es daher jetzt auch an dem einen Beyspiele bewenden lassen; in vorkommenden Fällen aber dagegen Sie anhalten, davon Gebrauch zu machen.

Siebenzehntes Gespräch.

L. Heute wollen wir zuvörderst eine Anwendung der Regeln der Multiplication und Division auf die Verwandlung gegebener Zahlen oder Grössen in andere von einem niedern oder höhern Grade kennen zu lernen suchen. Sie wissen bereits, daß dergleichen Verwandlung möglich ist, aber die Art und Weise derselben ist Ihnen noch nicht bekannt. Man nennt eine Grösse oder Zahl in Rücksicht auf eine andere eine Grösse oder Zahl von einem höhern Grade, wenn jedes Eins von ihr irgend eine Menge von dieser andern enthält, und dagegen eine Grösse oder Zahl von einem niedern Grade, wenn eine gewisse Anzahl derselben erst Eins von diesen andern macht. So sind Thaler Grössen eines höhern Grades in Rücksicht auf die Groschen und Pfennige, weil Ein Thaler 24 Gr. oder 288 Pf. enthält; hingegen sind Pfennige in Rücksicht auf die Groschen und Thaler, und die Groschen ebenfalls in Rücksicht auf die Thaler Grössen eines niedern Grades, weil 12 Pf. erst 1 Gr. und 288 Pf., so wie auch 24 Gr. erst 1 Rthlr. ausmachen. Ueberlegen Sie dies genau, so wird es Ihnen nicht schwer fallen, folgende Fragen zu beantworten. Erhält man durch die Resolution,

denn

denn so wollen wir die Verwandlung einer Grösse in eine andere von einem niedern Grade, so wie die Verwandlung einer Grösse in eine andere von einem höhern Grade Reduction nennen; erhält man also durch die Resolution eine grössere oder eine kleinere Anzahl von Dingen?

S. Durch die Resolution erhält man eine grössere Anzahl.

L. Aber durch die Reduction?

S. Eine kleinere.

L. Und eine wie vielmal so grosse Anzahl erhält man jederzeit durch die Resolution?

S. Eine so vielmal so grosse Anzahl, als Eins des höhern Grades Dinge des niedern Grades enthält.

L. Wenn man also eine Summe von Thalern zu Groschen resolvirt; wie viel Groschen erhält man?

S. Vier und zwanzig Mal so viel, als man Thaler hatte.

L. Und wenn man Pfunde in Loth verwandelt?

S. So bekommt man 32mal soviel Loth, als Pfunde gegeben sind.

L. Durch was für eine Rechnungsart verrichtet man also die Resolution?

S. Durch die Multiplication.

L. Und mit was für einer Zahl multiplicirt man jedesmal die zu resolvirende Grösse?

S.

S. Mit der Zahl, welche anzeigt, wie viel Dinge des niedern Grades Eins von dem gegebenen höhern Grade ausmachen.

L. Duch was für eine Rechnungsart verrichtet man aber die Reduction?

S. Durch die Division; und zwar dividirt man jedesmal durch die Zahl, welche anzeigt, wie viel Dinge des gegebenen niedern Grades Eins des gesuchten höhern Grades ausmachen.

L. Wie viel Groschen enthalten also 368 Rthlr.?

S. (Rechnet.)

```
   368
    24
  ----
  1472
  736
  ----
  883) 2 Gr.
```

(und sagt darauf) 883) 2 Gr.

L. Und wie viel Pfennige?

S. (Rechnet.)

```
    368
    288
   ----
   2944
  2944
  736
 ------
 105984 Pf.
```

(und sagt darauf) 105984 Pf.

L. Richtig haben Sie zwar auf diese Art die verlangte Summe der Gr. und Pf. gefunden, allein nicht auf dem bequemsten Wege. Anstatt mit

24 zu multipliciren, hätten Sie lieber mit 4x6 multipliciren sollen. Denn hätte

368 mit 4

multiplicirt 1472, und dies mit 6

multiplicirt 8832 gegeben. Um nun die Pf. zu finden, hätten Sie die 8832 nur noch mit 12 multipliciren dürfen entweder so,

8832
17664

105984; oder vorausgesetzt, daß Sie jede eintheilige Zahl mit 12 im Kopfe vervielfältigen können, so,

8832 mit 12 multiplicirt

giebt 105984.

Im ersten Falle wäre die ganze Rechnung diese,

368

1472

8832
17664

105984; im andern aber folgende gewesen,

368

1472

8832

105984.

L.

Vergleichen Sie diese Ausrechnungen mit der Ihrigen, und urtheilen Sie selbst, ob sie nicht kürzer sind.

S. Das sind sie allerdings, und ich habe nur nicht daran gedacht.

L. Es ist nicht genug, daß Sie die erklärten Rechnungsvortheile begriffen haben. Ich habe sie Ihnen deswegen bekannt gemacht, damit Sie, so oft als möglich, davon Gebrauch machen sollen, und das müssen Sie nunmehr thun. Verwandeln Sie also jetzt 542 Cent. in Pfd., und diese Pfd. darauf in Loth.

S. (Rechnet.)

542 Cent.	
542	
59620 Pfd. *)	(= 542 x 110)
238480	(= 59620 x 4)
1907840 Cent.	(= 238480 x 8)

L.

*) Das in Parenthesen eingeschlossene dient hier, so wie auch in der Folge, zur Erklärung der Art, wie das vorher daneben stehende gefunden worden.

L. Wie viel kürzer diese Art als folgende ist?

```
   542 Cent.
   110
  -----
   542
  542
  -----
  59620 Pfd.
     32
  -----
  11924
 17886
 -------
 1907840 Cent.
```

Es findet sich aber oft der Fall bey der Resolution, daß ausser der zu verwandelnden Grösse des höhern Grades auch Grössen des niedern Grades, worin jene verwandelt werden soll, da sind. Alsdann muß man diese letztern jedesmal zu dem gefundenen Factum addiren. Wenn z. B. 576 Rthl: 18 Gr. 9 Pf. in Gr. und Pf. verwandelt werden sollten, so müßte man rechnen

```
   576
 ------
   2304   (= 576×4)
 ------
  13842   (= 2304×6+18)
 ------
 166113   (= 13842×12+9)
```

Wenn man aber die hier nöthige Multiplication mit den Factoren verrichtet, so muß man sich ja hüten, das hinzu zu addirende nicht eher zu nehmen, als bey dem Factum aus dem letzten Factor; denn

denn sonst würde man statt des Einfachen ein Vielfaches, und in dem gerechneten Exempel statt 18 Gr. sechsmal 18 Gr. oder 108 Gr. nehmen, wenn man die gedachten 18 Gr. sogleich zu dem ersten Factum setzen wollte. Uebrigens fällt leicht in die Augen, daß man, um in einem jeden Falle die Resolution sowohl als die Reduction zu verrichten, wissen müsse, wie vielmal Eins des gegebenen höhern Grades Eins des gesuchten niedern Grades enthalte, und dies ist ein neuer Grund, jede Gelegenheit zu nutzen, die Grössen wirklicher Dinge gegen einander kennen zu lernen. Nun einige Exempel der Reduction. Wie viel Rthlr. machen 8832 Gr.?

S. (Rechnet.) 8832

2208 $(=\frac{8832}{4})$

(und antwortet) 368 Rthl. $(=\frac{2208}{6})$

L. So ist es recht, wenn Sie nicht nur richtig, sondern auch so kurz als möglich zu rechnen suchen. Wie viel Rthlr. machen aber 105984 Pf.?

S. (Rechnet.) 105984

8832 $(=\frac{105984}{12})$

2208 $(=\frac{8832}{4})$

(und, antwortet) 368 Rthl. $(=\frac{2208}{6})$

L.

L. Auf die sonst Ihnen allein bekannte Art hätten Sie hier rechnen müssen.

```
           1
     1     143
   2932    269
  105984|8832|368 Rthlr.
   11111  2444
     111    22
```

Welche Art besser sey, bedarf keiner Anzeige. Es ist Ihnen aber auch das zu statten gekommen, daß Sie Sich geübt haben, mit 12 eben so, wie mit einer eintheiligen Zahl, zu dividiren. Wenn Sie eben das mit 24 gethan hätten, so hätten Sie noch kürzer so rechnen können,

$$\frac{\frac{105984}{8832}}{368 \text{ Rthlr.}} \quad \left(= \frac{105984}{12}\right) \quad \left(= \frac{8832}{24}\right)$$

Wer viel mit Rechnungen zu thun hat, worin Rthlr., Gr. und Pf. vorkommen, für den ist solches sehr nützlich, und da bey uns nach Rthlr., Gr. und Pf. gerechnet wird, so muß ich Ihnen ebenfalls rathen, Sich die Factums aus 24 und den eintheiligen Zahlen recht geläufig zu machen. Wie viel Centner machen nun 1907840 Loth?

S. (Rechnet.)

$$\frac{1907840}{\frac{476960}{\frac{59620}{}}}$$

1907840

476960 $\left(=\frac{1907840}{4}\right)$

59620 $\left(=\frac{476960}{8}\right)$

(und antwortet) 542 Ct. $\left(=\frac{59620}{110}\right)$

L. Wie sind Sie im Stande gewesen, 59620 auf einmal mit 110 zu dividiren?

S. Ich habe 5962 durch 11 dividirt, und da ist die Uebersicht leicht. Es ist aber gleich, ob ich 59620 durch 110, oder 5962 durch 11 dividire, denn im letztern Falle ist sowohl der Dividendus als der Divisor zehnmal kleiner gemacht, und man erhält also denselben Quotienten.

L. Desselben Vortheils bedienen Sie Sich auch ferner, wenn sowohl der Dividendus als der Divisor am Ende Nullen haben, denn sehr oft ist er, wie z. B. auch hier, wichtig. Wie viel Rthl. machen nun 166113 Pf.

S. (Rechnet.)

166113

13842 und 9 Rest

3460 und 2 Rest. —

Hier geht es wohl nicht an, daß ich mit den Factoren dividire?

L.

L. Sie wissen freylich noch nicht, wie man sich dabey zu verhalten habe; allein es ist nicht nur möglich, sondern auch sehr oft nützlich, und Sie sollen auch die Verfahrungsart dabey bald lernen. Jetzt dividiren Sie mit 12 und 24 selbst.

S. (Rechnet.)

166113
―――――
13842 und 9 Rest. —

Wie dividire ich aber nun mit 24?

L. Die 9, welche übrig bleiben, sind 9 Pf., und also dividiren Sie nur die 13842 Gr. mit 24.

S. (Rechnet.)

24|13842|576.
1468
14
1

Hier bleiben wieder 18 übrig, welches 18 Gr. sind, und 166113 Pf. sind also 576 Rthlr. 18 Gr. 9 Pf.

L. Wenn Sie nun die bisherigen Reductionsexempel mit den vorhergehenden Resolutionsexempeln vergleichen, so werden Sie leicht wahrnehmen, daß man durch die Reduction die Richtigkeit der Resolution, und durch die Resolution die Richtigkeit der Reduction untersuchen und erfahren könne. Der Grund davon liegt darin, daß man durch die Division die Multiplication, so wie durch die Multiplication die Division probiren kann.

Auch die Art und Weise, wie man die gedachte Probe bey Resolutions- und Reductionsexempeln anstellt, bedarf keiner weitläuftigen Erklärung; und ich bemerke nur, daß es gut ist, wenn man bey dieser Probe andere Zahlen nimmt, als man bey dem Exempel gebraucht hat. Hat man z. E. mit 4x6 dividirt, so kann man mit 3x8 multipliciren, u. dgl., denn auf diese Art entdecket man gewiß den Fehler, der etwa begangen ist. — Nun sind wir im Stande, das, was uns aus der Multiplication noch übrig ist, nachzuholen, und zugleich unsere Kenntniß in der Division zu erweitern. Wie würden Sie also 436 Rthlr. 18 Gr. und 6 Pf. mit 548 multipliren?

S. Erst multiplicirte ich die 6 Pf., dann die 18 Gr., und endlich die 436 Rthlr. mit 548.

L. Auf diese Art befolgten Sie die Regeln der Multiplication für einen mehrtheiligen Multiplicandus, denn dergleichen ist hier, in so weit, daß Sie einen Theil desselben nach dem andern mit dem gegebenen Multiplicator multiplicirten, und dabey von den kleinsten Theilen anfiengen. Ob das allein aber schon hinlänglich seyn wird? Multipliciren Sie wirklich?

S.

S. (Rechnet.)

```
      6 Pf.
    548
  -----
   3288 Pf.
     18 Gr.
    548
  -----
    144
    72
   90
  -----
   9864 Gr.
    436 Rthlr.
    548
  -----
   3488
  1744
 2180
 ------
 238928 Rthlr.
```

Das Factum also ist 238928 Rthlr., 9864 Gr. und 3288 Pf.

L. Enthalten die 3288 Pf. nicht Gr.? und die 9864 Gr. nicht Rthlr.?

S. Ja.

L. Und wenn eine Summe von Pfennigen Groschen enthält, so pflegt man statt ihrer die in ihr enthaltene Anzahl von Groschen, so wie, wenn eine Summe Groschen Thaler enthält, statt dieser die in derselben enthaltene Anzahl von Thalern anzugeben. Ueberhaupt verwandelt man gern jede

Menge Dinge einer niedern Art in Dinge der höhern Art, sobald die gedachte Menge so groß ist, daß diese Verwandlung statt finden kann.

S. Also muß ich, wenn ich die 6 Pf. mit 548 multiplicirt habe, die 3288 Pf. zu Groschen reduciren, und die dadurch erhaltene Summe Groschen zu den 9864 Gr. addiren; ferner diese Summe Groschen in Thaler verwandeln, und was ich erhalte, zu den 238928 Rthlr. addiren?

L. Ganz recht. Thun Sie es nun.

S. (Rechnet.)

12 | 3288 | 274
84

9864
274

24 | 10138 | 422
2550
11

238928
422

239350

Es kommen also 239350 Rthlr. 10 Gr.

L. Sie haben Sich aber nicht aller der Vortheile bedient, die Sie bey dieser Rechnung hätten anbringen können; denn Sie hätten wenigstens so rechnen können. Wenn 436 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf.

6 Pf. mit 548 multiplicirt werden sollen, so kommen

1. 3288 Pf. oder 274 Gr.; denn dies ließ sich übersehen, ohne etwas weiter aufzuschreiben, als hier geschehen ist.

2. Wie viel Groschen kommen würden, konnten Sie so finden

548
4384 (Hier werden obige 274 Gr. sogleich dazu addirt.)
10138 Gr. | 422 Rthlr. 10 Gr.
2550
21

Das obige bleibt wie vorhin. Allein auch mit diesen Vortheilen ist die Rechnung noch immer weitläuftig, und wir werden daher, so bald es möglich ist, uns noch nach Verkürzungen umzusehen haben. Man kann nemlich hier auch so rechnen:

436 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf. x 548
436
3288
1644
2192
274
137
11 — 10
239350 Rthlr. 10 Gr.

Nach der vorhergehenden Art wäre die Ausrechnung:

436 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf. x 548

1. 3288 oder 274 Gr.

548

2. 4384

24|10138 Gr. oder 422 Rthlr. 10 Gr.

2550

11

548

3. 436

3288

1644

2192

239350 Rthlr. 10 Gr.; indem hier bey der Addition sogleich die vorhergehenden 422 Rthlr. 10 Gr. mitgenommen worden. Nicht wahr, Sie sind begierig, den von mir gegangenen Weg kennen zu lernen?

S. Er ist viel kürzer, und ich wünsche daher allerdings, ihn betreten zu können.

L. Ich werde Ihnen denselben auch bald beschreiben; doch zuvor rechnen Sie noch folgendes Exempel auf eine so kurze Art, als Ihnen möglich ist. Multipliciren Sie 36 Cent. 84 Pfd. 13 Loth 2 Qu. mit 96.

S.

S. Hier erhalte ich

1. 192 Qu. oder 48 Loth $(\frac{192}{4} = 48)$

2.

$$\begin{array}{r} 96 \\ 288 \\ \hline 32 | 1296 \\ 1 \end{array}$$

Lt. oder 40 Pfd. und 16 Lt.

$(\frac{1296}{32} = 40$ Pfd. 12 Loth.)

(Die vorhin erhaltenen 48 Loth sind bey der Addition mitgenommen worden.)

3.

$$\begin{array}{r} 84 \\ 96 \\ \hline 504 \\ 756 \\ \hline 8104 \end{array}$$

Pfd. oder 73 Cent. und 74 Pfd. $(\frac{8104}{110} = 73$ Cent. 74 Pfd.)

(Die vorhin erhaltenen 40 Pfd. sind auch hier bey der Addition sogleich mitgenommen worden.)

4.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 96 \\ \hline 216 \\ 324 \\ \hline 3529 \end{array}$$

Cent. 74 Pfd. 16 Loth.

(Auch hier sind die vorhin gefundenen 73 Cent. bey der Addition sogleich mitgenommen worden, und zu der Summe der 3529 Cent. die 74 Pfd. und 16 Loth am Ende hinzugesetzt worden, welche vorhin bey der vorgenommenen Reduction übrig blieben.)

L. Nun wollen wir auch sehen, wie die Division zu verrichten ist, wenn der Dividendus von der Art ist, als bey den betrachteten Exempeln der Multiplicandus war. Ich will selbst ein Exempel rechnen, und darauf die Art und Weise Ihnen erklären. Gesetzt also, daß 239350 Rthlr. 10 Gr. durch 548 dividirt werden sollten, so rechnete ich

```
548|239350 Rthlr. 10 Gr.|436 Rthlr.
    2311(2
     097
     57(2
     3(4
    ------
     1688
    ------
     10138|18 Gr.
      5754
      463
       37
       2
       548
    ------
      3288|6 Pf.
        4
```

Ich dividire hier ist die 239350 Rthlr. durch 548, und erhalte 436 Rthlr. zum Quotienten und 422 bleiben übrig. Diese 422 Thaler resolvire ich durch die Multiplication mit 4x6 in Groschen, und addire zu dem Factum die gegebenen 10 Gr, daß also 10138 Gr. kommen. Diese 10138 Gr. dividire

dire ich nun ebenfalls durch 548 und erhalte 18 Gr. zum Quotienten und 274 Gr. Rest. Diese 274 Gr. verwandle ich durch die Multiplication mit 12 in Pf. und das Factum der 3288 Pf. dividire ich auch durch 548, wo der Quotient 6 Pf. ist. Der ganze Quotient ist also 436 Rthlr. 18 Gr. und 6 Pf. Wenn Sie diese Verfahrungsart genau überdenken, so werden Sie finden, daß sich diese Division in keinen wesentlichen Dingen, sondern nur darin von der sonst betrachteten unterscheidet, daß man das nach der Division des grössern Theils übrig bleibende auf eine andere Art in kleinere Theile verwandeln muß. Kurz kann man diese Verwandlung so beschreiben, daß man sagt, man resolvire jedesmal das nach der Division eines grössern Theils übrig bleibende. Dividiren Sie nun 8465 Cent. 18 Pfd. 12 Loth durch 72.

S.

S. (Rechnet.)

12|8465 Cent. 18 Pfd. 12 Loth|117 Ct.
1241
55
4
41
4528|62 Pfd.
304
26
256
2060|28 Loth
624
6
4
176|2 Qu. und $\frac{32}{72}$ Qu.
32

(Die bey der Division der Cent. übrig bleibenden 41 sind durch die Multiplication mit 110 zu Pfd., die bey der Division der Pfd. übrig bleibenden 64 durch die Multiplication mit 4×8 zu Loth, und die bey der Division der Loth übrig bleibenden 44 durch die Multiplication mit 4 zu Qu gemacht, und bey der ersten Resolution die gegebenen 18 Pfd. und bey der 2ten die gegebenen 12 Loth zu dem gefundenen Factum addirt worden.)

L. Auch hier kann man die Multiplicationsexempel durch die Division, und die Divisionsexempel durch die Multiplication probiren. 436 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf. haben wir vorhin schon mit 548 multiplicirt, und das Factum war 239350 Rthlr.

Rthlr. 10 Gr. Multipliciren Sie also jetzt 117 Cent. 62 Pfd. 28 Loth 2 Qu. mit 72, so aber, daß Sie bey der Multiplication der Qu. die bey der letzten Division übrig gebliebenen 32 nicht vergessen.

S. (Rechnet.)

```
          2 Qu.
         72
        ---
        144
         32
        ---
        176 Qu.; diese mit 4 dividirt
        ---
geben    44 Loth

         28 Loth
         72
        ---
         56
        196
       ----
       2016
         44
       ----
       2060 Loth; diese mit 32 dividirt,

    32|2060|64
        24(2
        12
        (1
```

so kommen 64 Pfd. und 12 Loth.

```
   62 Pfd.
   72
  ----
  124
 434
 -----
 4464
   64
 -----
 4528 Pfd. diese mit 110 dividirt,
```

so kommen 41 Cent. 18 Pfd.

```
  117 Cent.
   72
  ----
  234
 819
 -----
 8424
   41
 -----
 8465 Cent.
```

Es kommen also, wenn man 117 Cent. 62 Pfd. 28 Loth und 2 Qu. mit 72 multiplicirt, und den gedachten letzten Rest bey den Qu. hinzu addirt, 8465 Cent. 18 Pfd. 12 Loth; und die vorhergehende Division ist also richtig gewesen.

L. Sie haben aber hier wieder sehr weitläuftig gerechnet. Denn einmal wäre es wohl nicht nöthig gewesen, die zu jedem Factum von dem vorhergehenden hinzu zu addirenden Zahlen erst aufzuschreiben; und dann ist 72 = 8x9, und Sie hätten

hätten daher auch mit diesen Factoren multipliciren können. Dann wäre die Rechnung gewesen

117 Ct. 62 Pfd. 28 Lt. 2 Qu. u. 32 Rest x 8 x 9

940 Ct. 63 Pfd. 4 Lt. —

8465 Ct. 18 Pfd. 12 Lt.

Wie kurz ist diese Rechnung gegen die vorhergehende gehalten? Verstehen Sie aber dieselbe auch?

S. O ja. Sie haben gerechnet: 8 x 2 Qu. = 16 Qu. = 4 Loth; 8 x 28 Loth = 224 Loth und 224 Loth + 4 Loth = 228 Loth = 7 Pfd. 4 Loth; 8 x 62 Pfd. = 496 Pfd. und 496 Pfd. + 7 Pfd. = 507 Pfd. = 4 Cent. 63 Pfd.; 8 x 117 Ct. = 936 Ct. und 936 Ct. + 4 Ct. = 940 Ct. Ferner haben Sie den Rest der 32 Qu. in 8 Lt. verwandelt und gerechnet, 9 x 4 Lt. = 36 Lt. und 36 Lt. + 8 Lt. = 44 Lt. = 1 Pfd. 12 Lt.; 9 x 63 Pfd. = 567 Pfd. und 567 Pfd. + 1 Pfd. = 568 Pfd. = 5 Ct. 18 Pfd.; 9 x 940 Cent. = 8460 Ct. und 8460 Ct. + 5 Ct. = 8465 Ct.

L. Suchen Sie ja diese Art zu multipliciren sich so geläufig zu machen, daß Sie Sich derselben, so oft es angeht, bedienen, denn der Vortheil ist, wie auch dieses Exempel wieder zeigt, beträchtlich.

Achtzehntes Gespräch.

L. Nun wollen wir, da wir bisher blos Multiplicatorzahlen betrachtet haben, auch die Divisoren in den Veränderungen, die damit vorgenommen werden können, genauer kennen zu lernen suchen. Um so kurz als möglich hiebey zu seyn, werde ich nicht bloß die Divisoren im strengsten Verstande, sondern auch die Vielfachen von diesen, von denen bey der Addition schon eins und das andere da gewesen, hieher rechnen. Dergleichen Vielfache von Divisoren sind z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ u. s. w. Sie erinnern Sich ohnstreitig noch aus meinem Unterrichte in der Addition, daß man diese Zahlen Brüche nennt, so wie Ihnen auch daraus die Benennungen Zähler und Nenner noch bekannt seyn werden.*) Da es uns zur Kürze im Ausdruck helfen wird, so wollen wir uns dieser Benennungen von jetzt an immer bedienen, und selbst die Divisoren im strengen Verstande bisweilen mit diesem Namen belegen. Vergleichen Sie also folgende Brüche mit einander,

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}$$

welche sich blos im Nenner unterscheiden. Welcher ist dem Werthe nach der grössete?

S.

*) S. 107. u. f.

S. $\frac{1}{2}$.

L. Und der kleinste?

S. $\frac{1}{32}$.

L. Und die übrigen?

S. Ein jeder dieser Brüche ist kleiner als der vorhergehende.

L. Vergleichen Sie auf eben diese Art folgende Brüche unter einander $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{32}$.

S. Unter diesen ist $\frac{3}{2}$ der grösseste, $\frac{3}{32}$ der kleinste, und ein jeder kleiner als der vorhergehende.

L. Wie verhält sichs also mit dem Werthe verschiedener Brüche, die einerley Zähler, aber verschiedene Nenner haben?

S. Je kleiner der Nenner ist, desto grösser ist der Werth des Bruchs, und je grösser der Nenner des Bruchs ist, desto kleiner ist sein Werth.

L. Um sich hiervon gewiß zu überzeugen, darf man sich nur an die Bedeutung der Brüche erinnern. Da der Nenner bey denselben anzeigt, daß eine Theilung vorgenommen, oder ein Theil einer gegebenen Grösse bestimmt werden solle, und dieser Theil desto kleiner wird, je grösser der Divisor ist; so muß, und zwar in eben dem Maasse bey einerley Zähler der Werth eines Bruchs desto kleiner seyn, je grösser der Nenner, und desto grösser, je kleiner der Nenner ist. Vergleichen Sie

nun folgende Brüche, die einerley Nenner, aber verschiedene Zähler haben, unter einander.

$\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{24}{4}$.

S. Von diesen Brüchen hat der den kleinsten Werth, der den kleinsten Zähler, und der den größten Werth, der den größten Zähler hat.

L. Was kann man also überhaupt von Brüchen, die sich nicht in den Nennern, sondern nur in den Zählern unterscheiden, in Ansehung ihres Werths behaupten?

S. Daß sie einen desto grössern oder kleinern Werth haben, je grösser oder kleiner ihr Zähler ist.

L. Auf eine wievielfache Art kann man also den Werth eines Bruchs vergrössern?

S. Auf eine zwiefache Art; entweder dadurch, daß man seinen Nenner kleiner macht, und den Zähler unverändert läßt, oder dadurch, daß man ohne den Nenner zu verändern den Zähler vergrössert.

L. Und wie vielmal muß man entweder den Nenner kleiner oder den Zähler grösser machen?

S. So vielmal als man den Werth des Bruchs grösser machen will.

L. Auf wie vielerley Art kann man ferner den Werth eines Bruchs kleiner machen?

S. Auch auf eine zwiefache Art; entweder so, daß man bey unveränderten Zähler den Nenner

gröſ-

grösser, oder so, daß man bey unveränderten Nenner den Zähler kleiner macht.

L. Und wie vielmal muß man entweder den Nenner grösser oder den Zähler kleiner machen?

S. So vielmal, als man den Werth des Bruchs kleiner machen will.

L. Um also einen Bruch mit einer Zahl zu multipliciren, multiplicirt man mit dieser Zahl den Zähler des Bruchs und läßt den Nenner unverändert, oder man dividirt mit ihr den Nenner, und läßt den Zähler unverändert; und um einen Bruch mit einer gegebenen Zahl zu dividiren, dividirt man mit derselben entweder den Zähler, oder multiplicirt mit ihr den Nenner des Bruchs, und läßt in jenem Fall den Nenner, so wie in diesem den Zähler unverändert. Bisweilen kann man von diesen beyden Wegen den einen so bequem als den andern betreten, bisweilen aber hat der eine vor dem andern einen Vorzug. Einige Exempel werden Ihnen dies deutlich machen. Multipliciren Sie also $\frac{6}{8}$ mit 2.

S. Da erhalte ich entweder $\frac{12}{8}$ oder $\frac{6}{4}$.

L. Dividiren Sie ferner $\frac{6}{8}$ mit 2.

S. Da erhalte ich entweder $\frac{3}{8}$ oder $\frac{6}{16}$.

L. In diesen Exempeln bleibt, wenn man dividirt, nichts übrig, und man kann daher durch die Division eben so gut als durch die Multiplication seinen Zweck erreichen. Da man indeß, wenn man dividirt, kleinere Zahlen erhält, als wenn man

multiplicirt, so ist der Weg durch die Division gleichwohl dem Wege durch die Multiplication vorzuziehen. Gesetzt aber, daß bey der vorzunehmenden Division etwas übrig bliebe, so wäre der Weg durch die Multipllcation besser. Wie müssen Sie also $\frac{11}{16}$ durch 4 multipliciren?

S. So, daß ich den Nenner von $\frac{11}{16}$ durch 4 dividire, indem hier beym Dividiren nichts übrig bleibt. Das verlangte Factum ist also $\frac{11}{4}$.

L. Wie multipliciren Sie aber $\frac{3}{5}$ durch 4?

S. So, daß ich den Zähler von $\frac{3}{5}$ durch 4 multiplicire, weil bey der Division der 5 durch 4 etwas übrig bleibt. Das verlangte Factum ist daher $\frac{12}{5}$.

L. Wie dividiren Sie nun $\frac{9}{13}$ durch 3?

S. Indem ich den Zähler von $\frac{9}{13}$ durch 3 dividire. Der verlangte Quotient ist daher $\frac{3}{13}$.

L. Wie dividiren Sie aber $\frac{7}{9}$ durch 3?

S. So, daß ich den Nenner von $\frac{7}{9}$ mit 3 multiplicire. Der gesuchte Quotient ist also $\frac{7}{27}$.

L. Ehe wir weiter gehen, müssen Sie Sich eine Eintheilung der Brüche merken, nach welcher man sie in ächte und unächte Brüche unterscheidet. So wie nemlich die Multiplicatorzahlen immer eine Menge ungetheilter Dinge anzeigen, weswegen man sie auch ganze Zahlen nennt, so zeigen die Brüche entweder einen Theil oder eine Menge von Theilen an. Jenes thun diejenigen, welche wir Divisoren genannt haben, dieses die übrigen

Brü-

Brüche. Nun enthält ein Bruch entweder weniger Theile als zu einem Ganzen erfordert werden, und dann heißt er ein ächter Bruch: oder er enthält so viel Theile oder noch mehr, als ein Ganzes ausmachen, und dann erhält er den Namen eines unächten Bruchs. Bey einem ächten Bruche ist also der Zähler kleiner als der Nenner, bey den unächten Brüchen aber ist er demselben gleich, oder größer. So sind z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{13}$ ächte, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{2}$ aber unächte Brüche. Da die unächten Brüche Ganze enthalten, so kann man sie oft mit Vortheil so ausdrucken, daß man an ihrer Stelle eine Zahl nimmt, welche diese Ganzen anzeigt, und dazu, wenn sie ausser den Ganzen etwa auch noch Theile in sich fassen, diese setzt. Wie viel Ganze ein unächter Bruch enthalte, zeigt der Quotient an, den man findet, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, und bleibt alsdann ein Rest, so zeigt dieser die von dem unächten Bruche ausser den Ganzen noch enthaltenen Theile an. Also kann man anstatt $\frac{7}{2}$ setzen $3\frac{1}{2}$, und 4 anstatt $\frac{8}{2}$. Was erhalten Sie also nun, wenn Sie $\frac{6}{8}$ mit 2 multipliciren?

S. $\frac{12}{8}$ oder $1\frac{4}{8}$.

L. Und wenn Sie $\frac{3}{5}$ mit 4 multipliciren?

S. $\frac{12}{5}$ oder $2\frac{2}{5}$.

L. Wenn eine ganze Zahl auf diese Art mit einem Bruche verbunden ist, so nennt man beyde auch einen gemischten Bruch, und die Verwand-

lung eines unächten Bruchs in eine ganze Zahl oder einen gemischten Bruch heißt eine Reduction desselben, so wie die Verwandlung eines gemischten Bruchs in einen unächten Bruch eine Resolution desselben heißt. Diese Resolution verrichtet man so, daß man die ganze Zahl des gemischten Bruchs mit dem Nenner seines Bruchs multiplicirt, den Zähler zu dem Factum addiret und diese Summe zum Zähler eines Bruchs macht, dessen Nenner der Nenner ist, mit welchem man multiplicirt hat. Anstatt $2\frac{2}{5}$ erhält man also durch die Resolution $\frac{12}{5}$, und anstatt $1\frac{4}{8}$ bekommt man $\frac{12}{8}$. Vergleichen Sie dieses Verfahren mit dem Verfahren bey der Division, so werden Sie bald bemerken, daß unter Brüchen und Quotienten kein Unterschied sey, und daß man den Zähler eines Bruchs als den Dividendus, so wie den Nenner als den Divisor betrachten könne, und umgekehrt. Dieses ist wegen der Erleichterung, die daher für die Rechnung mit Brüchen entsteht, eine wichtige Bemerkung, und Sie werden wohl thun, wenn Sie Sich oft daran erinnern. — Was geht denn nun wohl für eine Veränderung mit dem Werthe eines Bruchs vor, wenn man den Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl entweder multiplicirt oder dividirt?

S. Gar keine. Denn wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs mit einer und derselben Zahl multiplicirt, so wird der Bruch durch die

Mul-

Multiplication des Zählers so vielmal vergrössert, als er durch die Multiplication des Nenners verkleinert wird, und es bleibt also sein Werth derselbe: und wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so wird sein Werth durch die Division des Zählers eben so verkleinert, als er durch die Division des Nenners vergrössert wird, und bleibt also ebenfalls derselbe.

L. Wie sind also folgende Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$ in Ansehung des Werths beschaffen?

S. Sie sind alle unter einander gleich.

L. Was können Sie also anstatt $\frac{2}{3}$ nehmen?

S. $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{14}{21}$ u. s. w.

L. Und anstatt $\frac{48}{72}$?

S. $\frac{24}{36}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$.

L. Wenn man sich an die Uebereinstimmung erinnert, die zwischen Brüchen und Quotienten statt findet, so sieht man die Wahrheit des behaupten ebenfalls bald ein. Denn da die Quotienten nicht geändert werden, wenn man den Dividendus und Divisor entweder gleich vielmal vergrössert oder verkleinert, so muß auch der Werth eines Bruchs, da sein Zähler als der Dividendus und der Nenner als der Divisor betrachtet werden kann, unverändert bleiben, wenn man beyde mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt. Sie haben nun in der Addition bereits gelernt, wie Sie Brüche, die gleiche Nenner haben, in eine Summe

bringen, und in der Subtraction, wie Sie den Unterschied derselben finden sollen. Welches ist z. B. die Summe von $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ und $\frac{2}{6}$?

S. $\frac{14}{6}$ oder $2\frac{2}{6}$.

L. Das haben Sie gut gemacht, daß Sie sogleich reducirt haben. Und die Differenz von $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{6}$ ist?

S. $\frac{2}{6}$.

L. Können Sie nicht $\frac{2}{6}$ noch auf eine andere Art und so ausdrucken, daß Sie im Zähler und Nenner so kleine Zahlen als möglich erhalten?

S. Ja, ich kann $\frac{1}{3}$ anstatt $\frac{2}{6}$ nehmen, welches ich erhalte, wenn ich von $\frac{2}{6}$ den Zähler und Nenner durch 2 dividire.

L. Gern druckt man einen Bruch durch so kleine Zahlen als möglich aus, und so oft Sie es daher können, so vergessen Sie es nicht. — Sind Sie nun aber auch wohl im Stande $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{8}$ zu addiren, oder den letzten Bruch von dem erstern zu subtrahiren.

S. Nein.

L. Ist nicht $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, und $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$?

S. Ja.

L. Muß also nicht auch die Summe von $\frac{20}{24}$ und $\frac{9}{24}$ der Summe von $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{8}$, so wie die Differenz von $\frac{20}{24}$ und $\frac{9}{24}$ der Differenz von $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{8}$ gleich seyn?

S. Ja, und $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{8}$ geben also zur Summe $\frac{29}{24}$ oder $1\frac{5}{24}$, und zur Differenz $\frac{11}{24}$.

L.

L. Lassen sich nicht also auch Brüche von ungleichen Nennern addiren und von einander subtrahiren?

S. Ja; aber ich muß sie zuvor in Brüche von eben demselben Werthe verwandeln, die einerley Nenner haben.

L. Man könnte doch auch wohl $\frac{40}{48}$ anstatt $\frac{5}{6}$, und $\frac{18}{48}$ anstatt $\frac{3}{8}$ nehmen?

S. Ja, aber $\frac{20}{24}$ und $\frac{9}{24}$ nimmt man lieber, weil hier die Zähler und Nenner durch kleinere Zahlen ausgedruckt sind.

L. Um also Brüche, die verschiedene Nenner haben, zu einander addiren und von einander subtrahiren zu können, muß man nicht nur wissen, wie man die gegebenen Brüche in andere gleiche Brüche mit einerley Nenner verwandeln kann, sondern man muß diese Verwandlung auch so vorzunehmen im Stande seyn, daß man den möglich kleinsten Nenner erhalte. Hierzu kann man sich dieses Mittels bedienen. Man schreibt zuvörderst alle Nenner der zu addirenden, oder von einander zu subtrahirenden Brüche auf, und überlegt, ob man nicht mehrere derselben ohne Rest mit einer und derselben Zahl dividiren könne. So oft dieses möglich ist, dividirt man so viel als möglich durch eine und dieselbe Zahl, und merkt sich die gebrauchten Divisoren, die gefundenen Quotienten und die Nenner, welche sich nicht ohne Rest durch die gebrauchten Divisoren dividiren lassen.

Bey der ersten auf diese Art anzustellenden Division dividirt man nur die Nenner der gegebenen Brüche: bey den folgenden aber auch die bereits gefundenen Quotienten. Ist man so weit gekommen, daß sich von den Nennern der gegebenen Brüche und den gefundenen Quotienten keine mehr durch eine gemeinschaftliche Zahl dividiren lassen, so sucht man das Product aus den gebrauchten Divisoren, den gefundenen Quotienten und denen Nennern, welche keine Division erfahren haben, vorausgesetzt, daß dergleichen vorhanden sind, und dieses Product ist der Nenner, welchen man zum gemeinschaftlichen Nenner aller gegebenen Brüche machen kann. Sollten z. E. die Brüche

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{8},\ \frac{5}{16},\ \frac{1}{5},\ \frac{7}{12},\ \frac{4}{9}$$

in andre gleiche von einerley und zwar möglich kleinsten Nenner verwandelt werden; so schriebe ich, um zuvörderst diesen möglich kleinsten Nenner zu finden, die Nenner der gegebenen Brüche auf

	4, 9, 3, 8, 16, 5, 12, 9,	und dividirte die 4, 8, 16, 12,
mit 4)	9, 3, 2, 4, 5, 3, 9,	ferner hier die 9, 3, 3, 9,
mtt 3)	3, 2, 4, 5, 3,	so wie hier die 3 und 3
mit 3)	2, 4, 5	und hier endlich die 2 und 4
mit 2)	2, 5.	

Wenn der Quotient 1 wird, so hat man ihn nicht nöthig anzumerken. Nun multiplicirte ich die Divisoren 4, 3, 3, 2, und den Quotienten 2 und

den

den ungetheilten Nenner 5 miteinander, wodurch ich 720 erhielte, und dieses wäre der gesuchte möglich kleinste Nenner. Versuchen Sie nun den den möglich kleinsten gemeinschaftlichen Nenner der Brüche

$$\frac{5}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{5}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{7}$$

zu finden.

S. (Rechnet nach der vorhin angeführten Regel.)

6, 4, 8, 9, 3, 7. Hier dividire ich
durch 3) 2, 4, 8, 3, 7, hier
durch 2) 2, 4, 3, 7, u. hier ebenfalls
durch 2) 2, 3, 7.

3x2x2x2x3x7 nun ist 504, und dies ist die gesuchte Zahl.

L. Ehe ich weiter gehe, will ich zwey Vortheile bemerken, wodurch man sich diese Arbeit verkürzen kann. Einmal nemlich braucht man, wenn unter den Nennern der gegebenen Brüche einer öfter vorkommt, nur einen davon zu nehmen; und zweytens kann man auch die kleinern Nenner, mit denen sich ein grösserer ohne Rest dividiren läßt, weglassen. Hiernach wäre das erste Exempel

9, 16, 5, 12; hier dividirt
mit 3) 3, 16, 5, 4, und jetzt die 4 ausgelassen, so hat man 3, 3, 16, 5 mit einander zu multipliciren, und dadurch erhält man sogleich 720. Bey dem ersten Aufschreiben der Nenner habe

habe ich die 4 und 8 ausgelassen, weil sich dadurch 16 ohne Rest dividiren läßt, die 3, weil sie die 9 ohne Rest dividiren, und die eine 9, weil der Nenner 9 zweymal vorkommt. Bey den nach der Division erhaltenen Zahlen lasse ich die 4 weg, weil sie 16 ohne Rest dividirt. Das zweyte Exempel aber wird folgendes

6, 8, 9, 7, hier dividirt

mit 3) 2, 8, 3, 7, und nun die 2 weggelassen, weil sie die 8 ohne Rest dividirt. Also ist der möglich kleinste gemeinschaftliche Nenner 3x8x3x7 = 504. — Hat man nun den möglich kleinsten gemeinschaftlichen Nenner mehrerer Brüche gefunden, so verwandelt man diese so, daß man mit dem Quotienten aus dem Nenner eines jeden Bruchs in die gefundene Zahl seinen Zähler multiplicirt, und dies Product zum Zähler, so wie die gedachte Zahl zum Nenner macht. Hier pflegt man nun die gegebenen Brüche unter einander und ihren gemeinschaftlichen Nenner darüber zu schreiben; ferner setzt man den Quotienten aus dem Nenner eines jeden Bruchs in den gemeinschaftlichen Nenner neben dem Bruch, und das Product aus diesem Quotienten und den Zähler wieder hierneben. Hier haben Sie davon ein Beyspiel.

720

$\frac{3}{4}$	180	540
$\frac{5}{9}$	80	400
$\frac{2}{3}$	240	480
$\frac{7}{8}$	90	630
$\frac{5}{16}$	45	225
$\frac{1}{5}$	144	144
$\frac{3}{12}$	60	180
$\frac{4}{9}$	80	320

(Es ist also $\frac{3}{4} = \frac{540}{720}$
$\frac{5}{9} = \frac{400}{720}$
$\frac{2}{3} = \frac{480}{720}$
u. s. w.

Gesetzt, daß nun alle diese Brüche in eine Summe verwandelt werden sollten, so dürfte man nur, wie bekannt, ihre Zähler addiren, ihre Summe zum Zähler eines Bruchs machen, dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner wäre, und wenn es nöthig wäre, die Reduction vornehmen. Addiren Sie z. B. die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$.

S. (Rechnet nach dem vorhergehenden.)

504

$\frac{5}{6}$	84	420
$\frac{3}{4}$	126	378
$\frac{7}{8}$	63	441
$\frac{5}{9}$	56	280
$\frac{2}{3}$	168	336
$\frac{3}{7}$	72	216
		2071

Es kommen also zur Summe $\frac{2071}{504}$ oder $4\frac{55}{504}$.

L.

L. Gesetzt nun, daß man Brüche von verschiedenen Nennern subtrahiren soll, so verwandelt man selbige ebenfalls erst in gleiche Brüche von einerley Nennern, und verrichtet dann die Subtraction, wie bereits erklärt worden ist. Subtrahiren Sie also $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{9}$.

S. Der gemeinschaftliche Nenner ist hier 36. Ich rechne also

$$\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{36} \\ \frac{8}{9} & 4 & 32 \\ \frac{3}{4} & 9 & 27 \\ \hline & & 5 \end{array}$$

Der Unterschied ist also $\frac{5}{36}$.

L. Wenn man gegebene Brüche, bey denen es möglich ist, in andere gleiche mit kleinern Zähler und Nenner verwandelt; so setzt man sich dadurch oft in den Stand, mit mehrerer Leichtigkeit und Gewisheit über den Werth dieser Brüche zu urtheilen. Es ist also die Frage wichtig: Wie findet man die möglich kleinsten Zahlen, wodurch sich ein gegebener Bruch ausdrucken läßt? Man reducirt, wie Ihnen schon bekannt ist, einen Bruch auf einen andern durch kleinere Zahlen ausgedruckte, wenn man den Zähler und Nenner desselben durch eine und dieselbe Zahl dividirt. Will man also die möglich kleinsten Zahlen finden, wodurch sich ein Bruch ausdrucken läßt; so muß

man

man die größte derer Zahlen zu finden im Stande seyn, durch welche sich der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs ohne Rest dividiren lassen. Oft zeigt sich dieselbe bey einer aufmerksamen Betrachtung des Zählers und Nenners bald. So sieht man z. E. leicht, daß $\frac{6}{8}$ sich nicht kleiner als durch $\frac{3}{4}$, und $\frac{15}{25}$ nicht anders als durch $\frac{3}{5}$ ausdrucken läßt. Sind aber der Zähler und Nenner so beschaffen, daß man wegen der gedachten größten Zahl in Zweifel ist, so kann man auf folgende Art ihren größten gemeinschaftlichen Divisor finden. Man dividirt zuerst die grössere Zahl durch die kleinere, dann den gebrauchten Divisor durch den gebliebenen Rest, diesen Divisor von neuem durch das, was übrig geblieben ist, und so fort, bis entweder kein Rest oder 1 übrig bleibt. Ist das letztere, so läßt sich der Bruch gar nicht auf kleinere Zahlen reduciren; ist aber das erstere, so ist der letzte Divisor die gesuchte größte Zahl. Soll z. B. $\frac{315}{420}$ auf die möglich kleinsten Zahlen reducirt werden, so dividirt

man erstlich durch 315 die 420, ferner durch

den Rest 105 die 315: und da hier

nach der Division nichts übrig bleibt, so ist 105 die Zahl, wodurch sich der Zähler und Nenner von $\frac{315}{420}$ dividiren und auf die kleinsten Zahlen bringen lassen. Es ist also $\frac{315}{420} = \frac{3}{4}$. Sollte ferner $\frac{512}{88}$ auf die kleinsten Zahlen reducirt werden, so dividirte man zuvörderst die 512 durch 88 dann

die

die 88 durch den Rest 72, ferner
diese 72 durch den Rest 16, und
diese 16 durch den Rest 8; und da nun nichts weiter übrig bliebe, so wäre 8 der gemeinschaftliche größte Divisor des Zählers und Nenners in $\frac{512}{88}$, und $\frac{512}{88}$ also gleich $\frac{64}{11}$. Sollte endlich $\frac{37}{54}$ auf die möglich kleinsten Zahlen reducirt werden, so wäre der Rest von $\frac{54}{37}$ die Zahl 17, ferner der Rest von $\frac{37}{17}$ die Zahl 3, der Rest von $\frac{17}{3}$ die Zahl 2, und $\frac{3}{2}$ liesse im Reste 1, und $\frac{37}{54}$ könnte also auf keine kleinere Zahlen reducirt werden. — Versuchen Sie nun diese Regel anzuwenden, und reduciren Sie $\frac{52}{72}$ auf die möglich kleinsten Zahlen.

S. (Rechnet.)

52 | 72 | 1
20

20 | 52 | 2
1

12 | 20 | 1
8

8 | 12 | 1
4

Die größte Zahl, womit man den Zähler und Nenner in $\frac{52}{72}$ dividiren kann ist 4, und $\frac{52}{72}$ also gleich $\frac{13}{18}$.

L. Mehrere Beyspiele werden hievon nicht nöthig seyn. So gut indeß diese Regel ist, so

muß

muß man sie doch nicht eher anwenden, als bis man nicht ohne sie fertig werden kann. Grade Zahlen lassen sich durch 2 theilen, und Zahlen, die sich auf 5 oder 0 endigen, lassen sich durch 5 theilen. Vermittelst dieser und anderer Regeln findet man in sehr vielen Fällen sogleich einen gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und Nenners des gegebenen Bruchs, wenn schon nicht den größten, und man ist durch die Division des Zählers und Nenners durch denselben doch im Stande, den Bruch auf kleinere Zahlen zu reduciren. Allein nach der ersten Reduction fällt denn auch oft bald noch eine andere in die Augen, und so geschieht es sehr häufig, daß man ohne jene Regel anzuwenden, den gegebenen Bruch auf die kleinsten Zahlen reduciren kann. So reducirt man z. B. $\frac{52}{72}$ leicht, wenn man diesen Bruch erst in $\frac{26}{36}$, und diesen dann in $\frac{13}{18}$ verwandelt; denn daß $\frac{13}{18}$ nicht kleiner gemacht werden könne, beurtheilt man leicht. Suchen Sie diese Bemerkung zu benutzen, und damit Sie es können, so üben Sie Sich öfters in dieser Art der Reduction. — Wie werden Sie nun aber wohl $\frac{3a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{5e}{f}$. auf einerley Nenner bringen können?

S. Hier kann ich doch nicht so verfahren als bey Zahlen?

L. Im Grunde wohl eben so, nur mit etwas weniger Mühe. Denn wenn Sie den Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit den Nennern aller übrigen Brüche multipliciren; so erhalten Sie Brüche, die den gegebenen gleich sind, und einerley Nenner haben.

S. Also multiplicire ich den Zähler und Nenner von $\frac{3a}{b}$ mit df, den Zähler und Nenner von $\frac{c}{d}$ mit bf, und den Zähler und Nenner von $\frac{5e}{f}$ mit bd?

L. Ganz recht.

S. Dann ist $\frac{3a}{b} = \frac{3adf}{bdf}$

$$\frac{c}{d} = \frac{bcf}{bdf}.$$

$$\frac{5e}{f} = \frac{5ebd}{bdf}.$$

L. Welches ist also die Summe von $\frac{3a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{5e}{f}$?

S. $\frac{3adf + bcf + 5ebd}{bdf}.$

L. Und die Differenz $\frac{5ac}{b}$ und $\frac{3b}{f}$.

S. $\frac{5acf - 3b^2}{bf.}$

L. Nun wird es Ihnen nicht schwer fallen, jede Art der Brüche in Buchstaben zu addiren, zu subtrahiren, zu vereinigen und ihren Unterschied zu bestimmen. Alles kommt zuvörderst darauf an, daß Sie die gegebenen Brüche in andere gleiche mit einerley Nenner verwandeln, und dann nach den Ihnen bereits bekannten Regeln verfahren. Bey dieser Verwandlung können Sie übrigens die Vortheile ebenfalls anbringen, die ich Ihnen bey dergleichen Verwandlung der durch Zahlen ausgedruckten Brüche gezeigt habe. Kommt nemlich ein Nenner öfter vor, so haben Sie nur nöthig ihn einmal zu nehmen, und ist einer ein Factor eines andern, so kann man ihn ebenfalls übergehen. Verwandeln Sie hiernach $\frac{3a}{b}$, $\frac{4c}{b}$, $\frac{e}{f}$ und $\frac{g}{h}$.

S. Dann ist $\frac{3a}{b} = \frac{3afh}{bfh}$

$$\frac{4c}{b} = \frac{4cfh}{bfh}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{ebh}{fbh}$$

und $\frac{g}{h} = \frac{gbf}{hbf}$.

L. So verwandeln Sie auch $\frac{3f}{ab}$, $\frac{2c}{b}$, $\frac{c}{f}$.

S. Hier wird $\frac{3f}{ab} = \frac{3ff}{abf}$

$$\frac{2c}{b} = \frac{2caf}{abf}$$

und $\frac{c}{f} = \frac{cab}{fab}$.

L. Hier wollen wir heute stehen bleiben, und das, was von der Multiplication und Division der Brüche, es mag nun eine oder beyde gegebene Zahlen zu den Brüchen gehören, übrig ist, zu dem Gegenstande unserer nächsten Unterredung machen.

Neunzehntes Gespräch.

L. Die Regeln, welche man bey der Multiplication und Division mit Brüchen zu befolgen hat, findet und versteht man sehr leicht, wenn man sich nur recht deutlich vorstellt, was es heisse, mit einem Bruche multipliciren oder dividiren. Um zuerst von der Multiplication zu reden, so wissen Sie, daß Multipliciren oder ein bestimmtes Vielfache von einer Grösse oder Zahl finden einerley sey; und auch, daß durch den Multiplicator das Vielfache, welches durch die Multiplication gefunden werden soll, bestimmt werde. Ist nun der Multiplicator eine ganze Zahl, so sucht man von dem Multiplicandus das Vielfache, welches denselben eben so oft enthält, als der Multiplicator eins in sich faßt. Wie dieses geschehe, wissen Sie bereits, der Multiplicandus mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn. Ist aber der Multiplicator ein Bruch, so enthält er nicht eins, sondern einen oder mehrere Theile von eins; und soll man daher mit einem Bruche multipliciren, so muß man von dem Multiplicandus einen oder soviel solcher Theile suchen, als der Multiplicator von eins in sich begreift. Ein Beyspiel mag dies deutlicher machen. Gesetzt also, daß 36 Rthlr. durch $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden

dies zu thun, multiplicirt man den Zähler des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators. Also erfordert die Multiplication eines Bruchs mit einem andern die Multiplication der Zähler und die Multiplication der Nenner unter einander.

L. Die angeführte Regel ist also richtig; allein bey ihrer Befolgung gelangt man nicht allezeit auf dem kürzesten Wege zu seinem Zwecke. Um hier so kurz als möglich jedesmal zu rechnen, dürfen Sie indeß nur bedenken, daß es gleich viel ist, einmal, ob man den Zähler eines Bruchs multiplicirt oder durch dieselbe Zahl seinen Nenner dividirt, und zweytens auch, ob man den Zähler eines Bruchs durch eine Zahl dividirt, oder ob man durch dieselbe Zahl den Nenner multiplicirt; und anstatt der Multiplication immer die Division verrichten, wenn solche keinen Rest giebt. Anstatt bey $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ die 5 mit der 3 zu multipliciren, ist es z. B. viel kürzer, wenn man den Nenner 6 mit 3 dividirt, und den Quotienten 2 darauf mit 4 multiplicirt; denn auf diese Art erhält man $\frac{5}{8}$, ohne daß man nöthig hat, erst eine Reduction des gefundenen Bruchs auf kleinere Zahlen vorzunehmen. — Multipliciren Sie hiernach $\frac{7}{18}$ mit $\frac{6}{8}$.

S. Hier dividire ich den Nenner 18 mit dem Zähler 6, und multiplicire den Quotienten 3 mit dem Nenner 8. Das Factum aus $\frac{7}{18} \times \frac{6}{8}$ ist also $\frac{7}{24}$.

L. Und das Factum aus $\frac{9}{16} \times \frac{2}{3}$?

S. Ist $\frac{3}{8}$. Hier ist der Vortheil noch grösser, indem man zweymal dividiren kann.

L. Nunmehr wird Ihnen die Multiplication der reinen Brüche mit reinen Brüchen auch selbst in Buchstaben keine Schwierigkeit machen. Welches ist z. B. der Quotient aus $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$?

S. $\frac{ac}{bd}$.

L. Ferner der Quotient aus $\frac{ab}{cd} \times \frac{c}{e}$.

S. $\frac{ab}{de}$.

L. Und der Quotient aus $\frac{abc}{def} \times \frac{dg}{bh}$.

S. $\frac{acg}{efh}$.

L. Hier ist so gar alles noch leichter als in Zahlen. Denn die Buchstaben, die der Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des andern Bruchs gemein hat, fallen ganz weg, und die übrigen setzt man nur gehörig neben einander. Allein nun ist noch der Fall übrig, wenn unter den gegebenen Zahlen vermischte Brüche vorkommen, oder auch wohl beyde dergleichen sind. Ein solcher Fall

Theils von eins. Mit einem Bruche dividiren heißt also eine Grösse oder Zahl finden, davon der Dividendus einen Theil so vielmal enthält, als der Divisor dergleichen von eins in sich faßt. Soll z. B. 24 durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden, so muß eine Zahl gefunden werden, davon 24 nur $\frac{3}{4}$ ist. Wie kann nun dieselbe gefunden werden? Da der Zähler des Divisors anzeigt, wie viel Theile von dem Quotienten der gegebene Dividendus enthält, so darf man, um einen der Theile des Quotienten zu finden, aus welchen der Dividendus besteht, den Dividendus nur durch diesen Zähler dividiren; und um daraus den ganzen Quotienten zu finden, diesen Theil mit dem Nenner des Divisors multipliciren. In dem angeführten Exempel rechnet man also: $\frac{24}{3} = 8$ und $8 \times 4 = 32$, und dies ist der verlangte Quotient.

S. Dann ist die Division mit einem Bruche nicht schwer. Denn wenn man den Divisor so verändert, daß man seinen Zähler zum Nenner, und seinen Nenner zum Zähler macht, so kann man die Division verrichten, wenn man mit diesem Bruche multiplicirt.

L. Diese Bemerkung war sehr gut. Vermittelst derselben werden Sie jedes hieher gehörige Exempel zu rechnen im Stande seyn; und zugleich auf die kürzeste Art, wenn Sie gehörige Aufmerksamkeit anwenden. Dividiren Sie also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{4}{3}$.

S.

S. Dann multiplicire ich $\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ und der gesuchte Quotient ist also $\frac{5}{8}$.

L. Dividiren Sie ferner $3\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{6}$.

S. Hier multiplicire ich $3\frac{2}{3}$ durch $\frac{6}{5}$, oder $\frac{11}{3}$ durch $\frac{6}{5}$, und erhalte also $\frac{66}{15}$ oder $4\frac{2}{5}$.

L. Warum haben Sie nicht lieber mit dem Nenner 3 den Zähler 6 dividirt? Alsdann wäre das gesuchte $\frac{22}{5}$ oder $4\frac{2}{5}$ leichter gefunden worden. Dividiren Sie nun auch $20\frac{23}{45}$ durch $2\frac{3}{5}$.

S. Dann verwandele ich $2\frac{3}{5}$ zuvörderst in $\frac{13}{5}$, und dieses in $\frac{5}{13}$, und multiplicire nun $20\frac{23}{45}$ durch $\frac{5}{13}$. Da nun $20\frac{23}{45} = \frac{923}{45}$ und $\frac{923}{45} \times \frac{5}{13} = \frac{923}{117} = 7\frac{104}{117}$, oder $7\frac{8}{9}$, so ist dieses der gesuchte Quotient.

L. Um auch noch ein Paar Exempel aus der Buchstabenrechnung zu rechnen; so dividiren Sie auch 6a durch $\frac{e}{f}$.

S. $6a : \frac{e}{f}$ ist so viel als $6a \times \frac{f}{e}$ und also gleich $\frac{6af}{e}$.

L. Welches ist ferner der Quotient aus $\frac{6a}{b} : \frac{c}{d}$?

S. Das Factum aus $\frac{6a}{b} \times \frac{d}{c}$, oder $\frac{6ad}{bc}$.

L.

S. (Rechnet.)

	596 Rthlr. 18 Gr. 8 Pf., dividirt durch 8
giebt	74 Rthlr. 14 Gr. 4 Pf., und dieses dividirt durch
4 giebt	18 Rthlr. 15 Gr. 7 Pf.

L. Wie haben Sie hier gerechnet?

S. Bey der Division der 596 Rthlr. durch 8 blieben $\frac{4}{8}$ Rthlr. übrig. Diese verwandelte ich in 12 Gr., und addirte die 2 Gr. hinzu, welche zum Quotienten der 18 Gr. durch 8 sich ergaben. Hier aber blieben noch $\frac{2}{8}$ Gr. oder 3 Pf. übrig, und diese 3 Pf. mit dem 1 Pf., welchen ich aus $\frac{8}{8}$ Pf. erhielt, haben die 4 Pf. gegeben. Ferner blieben bey der Division der 74 Rthlr. durch 4 zum Reste $\frac{2}{4}$ Rthlr. oder 12 Gr. Aus $\frac{14}{4}$ Gr. erhielt ich $3\frac{2}{4}$ Gr. oder 3 Gr. 6 Pf. Diese 3 Gr. mit den vorhergehenden 12 Gr. gaben die 15 Gr. im Exempel, so wie diese 6 Pf. mit den 1 Pf. aus $\frac{4}{4}$ Pf. die 7 Pf.

L. Sie haben das bisherige schnell und gut gefaßt; allein Sie dürfen es dabey nicht bewenden lassen, sondern Sie müssen nun, so oft es möglich ist, Sich in der Ausübung der erlernten Regeln zu üben suchen. Ob Sie das werden gethan haben oder nicht? Dieses zu bemerken werde ich in der Folge oft Gelegenheit haben, indem wir alles erlernte sehr oft gebrauchen werden. Wenn das geschieht, so werde ich denn auch Ihre bisher erworbene Kenntnisse noch immer mehr zu erweitern im Stande seyn, und mein Unterricht ist Ihnen als-

dann

L. Wenn also die Division keinen Rest giebt, so fängt man am besten von ihr an; bliebe aber nach der Division etwas übrig, so ist es besser, wenn man von der Multiplication anfängt. Vergleichen Sie nun dieses von der Multiplication einer Zahl durch einen Bruch mit dem, was ich Ihnen von der Multiplication eines Bruchs durch eine ganze Zahl gesagt habe, so werden Sie finden, daß das Verfahren in beyden Fällen dasselbe ist; und ich habe daher nicht nöthig, länger hiebey zu verweilen. Wie aber wird man nun einen Bruch mit einem Bruche multipliciren?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Um einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren, muß man einmal die Zähler und dann die Nenner beyder Brüche mit einander multipliciren, und das Factum der Zähler zum Zähler, so wie das Factum der Nenner zum Nenner eines neuen Bruchs machen, der dann das gesuchte Factum ist.

L. Also wäre das Factum aus $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4}$?

S. $\frac{15}{24}$ oder $\frac{5}{8}$.

L. Wie so?

S. Um einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren, muß man den Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplicators dividiren, und dies geschieht, wenn man den Nenner des Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplicators multiplicirt; ferner muß man den Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators multipliciren, und um

dies zu thun, multiplicirt man den Zähler des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators. Also erfordert die Multiplication eines Bruchs mit einem andern die Multiplication der Zähler und die Multiplication der Nenner unter einander.

L. Die angeführte Regel ist also richtig; allein bey ihrer Befolgung gelangt man nicht allezeit auf dem kürzesten Wege zu seinem Zwecke. Um hier so kurz als möglich jedesmal zu rechnen, dürfen Sie indeß nur bedenken, daß es gleich viel ist, einmal, ob man den Zähler eines Bruchs multiplicirt oder durch dieselbe Zahl seinen Nenner dividirt, und zweytens auch, ob man den Zähler eines Bruchs durch eine Zahl dividirt, oder ob man durch dieselbe Zahl den Nenner multiplicirt; und anstatt der Multiplication immer die Division verrichten, wenn solche keinen Rest giebt. Anstatt bey $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ die 5 mit der 3 zu multipliciren, ist es z. B. viel kürzer, wenn man den Nenner 6 mit 3 dividirt, und den Quotienten 2 darauf mit 4 multiplicirt; denn auf diese Art erhält man $\frac{5}{8}$, ohne daß man nöthig hat, erst eine Reduction des gefundenen Bruchs auf kleinere Zahlen vorzunehmen. — Multipliciren Sie hiernach $\frac{7}{18}$ mit $\frac{6}{8}$.

S. Hier dividire ich den Nenner 18 mit dem Zähler 6, und multiplicire den Quotienten 3 mit dem Nenner 8. Das Factum aus $\frac{7}{18} \times \frac{6}{8}$ ist also $\frac{7}{24}$.

L.

L. Und das Factum aus $\frac{9}{16} \times \frac{2}{3}$?

S. Ist $\frac{3}{8}$. Hier ist der Vortheil noch grösser, indem man zweymal dividiren kann.

L. Nunmehr wird Ihnen die Multiplication der reinen Brüche mit reinen Brüchen auch selbst in Buchstaben keine Schwierigkeit machen. Welches ist z. B. der Quotient aus $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$?

S. $\frac{ac}{bd}$.

L. Ferner der Quotient aus $\frac{ab}{cd} \times \frac{c}{e}$.

S. $\frac{ab}{de}$.

L. Und der Quotient aus $\frac{abc}{def} \times \frac{dg}{bh}$.

S. $\frac{acg}{efh}$.

L. Hier ist so gar alles noch leichter als in Zahlen. Denn die Buchstaben, die der Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des andern Bruchs gemein hat, fallen ganz weg, und die übrigen setzt man nur gehörig neben einander. Allein nun ist noch der Fall übrig, wenn unter den gegebenen Zahlen vermischte Brüche vorkommen, oder auch wohl beyde dergleichen sind. Ein solcher Fall

ist, wenn $8\frac{1}{2}$ mit $\frac{3}{4}$, oder $2\frac{3}{5}$ mit $\frac{8}{9}$ multiplicirt werden sollte, u. s. w. Lange werden wir indeß nicht nöthig haben, bey diesen Fällen zu verweilen. Denn da wir bereits wissen, wie die Multiplication mit reinen Brüchen zu verrichten ist, und jeder gemischter Bruch sich in dergleichen verwandeln läßt, so dürfen wir uns auch nur überhaupt merken, daß bey der Multiplication gemischter Brüche zuvörderst die gedachte Resolution vorgenommen, und dann nach den bekannten Regeln gehandelt werden könne. Soll also $8\frac{1}{2}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden; so ist $8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ und $8\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ also einerley mit $\frac{17}{2} \times \frac{3}{4}$, und hiervon ist das Factum $\frac{51}{8}$ oder $6\frac{3}{8}$. Wie würden Sie also $2\frac{3}{5}$ mit $7\frac{8}{9}$ multipliciren?

S. Ich verwandele zuvörderst $2\frac{3}{5}$ in $\frac{13}{5}$, und $7\frac{8}{9}$ in $\frac{71}{9}$ und multiplicire nun $\frac{13}{5}$ mit $\frac{71}{9}$ so, daß ich Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicire. Das Factum aus $2\frac{3}{5} \times 7\frac{8}{9}$ ist also $\frac{13}{5} \times \frac{71}{9}$ gleich, und folglich $\frac{923}{45}$ oder $20\frac{23}{45}$.

L. Sehr häufig ist dies nicht nur ein richtiger, sondern selbst der kürzeste Weg, wie in den beyden gerechneten Exempeln. Bisweilen aber, und insbesondere, wenn die eine der gegebenen Zahlen eine ganze Zahl ist, ist es besser, daß man die gedachte Resolution nicht vornimmt, sondern bey der Multiplication theilweise verfährt. Sollte z. B. $9\frac{7}{8}$ mit 6 multiplicirt werden, so wäre es viel besser, daß man zu dem Factum aus 9×6 oder 54

das Factum aus $\frac{7}{8} \times 6$ oder $\frac{42}{8}$ oder $5\frac{2}{8}$ oder $5\frac{1}{4}$ addirte, und so $59\frac{1}{4}$ fände, als wenn man erst $9\frac{7}{8}$ in $\frac{79}{8}$ verwandelte, dies mit 6 multiplicirte, und das Factum $\frac{474}{8}$ in $59\frac{1}{4}$ veränderte. Diesen Fall merken Sie Sich daher, und multipliciren Sie nun auch $3a + \frac{c}{b}$ mit $\frac{e}{f}$.

S. Hier verwandele ich $3a + \frac{c}{b}$ erst in $\frac{3ab + c}{b}$, und multiplicire diesen Bruch mit $\frac{e}{f}$. Das Factum aus $3a + \frac{c}{b}$ und $\frac{e}{f}$ ist also $\frac{3abe + ce}{bf}$.

L. Nun können wir zur Division mit Brüchen fortgehen, wobey ebenfalls das erste und wichtigste ist, daß wir uns deutlich vorzustellen suchen, was es heisse, mit einem Bruche dividiren. Durch eine ganze Zahl dividiren heißt, die Grösse oder Zahl finden, wovon der Dividendus das Vielfache ist, welches der Divisor anzeigt; oder, welches dasselbe ist, die Grösse oder Zahl finden, von welcher der Dividendus eben so das Vielfache ist, als der Divisor es ist von eins. Ist nun aber der Divisor ein Bruch, so ist er nicht das Vielfache von eins, sondern das Vielfache irgend eines Theils

Theils von eins. Mit einem Bruche dividiren heißt also eine Grösse oder Zahl finden, davon der Dividendus einen Theil so vielmal enthält, als der Divisor dergleichen von eins in sich faßt. Soll z. B. 24 durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden, so muß eine Zahl gefunden werden, davon 24 nur $\frac{3}{4}$ ist. Wie kann nun dieselbe gefunden werden? Da der Zähler des Divisors anzeigt, wie viel Theile von dem Quotienten der gegebene Dividendus enthält, so darf man, um einen der Theile des Quotienten zu finden, aus welchen der Dividendus besteht, den Dividendus nur durch diesen Zähler dividiren; und um daraus den ganzen Quotienten zu finden, diesen Theil mit dem Nenner des Divisors multipliciren. In dem angeführten Exempel rechnet man also: $\frac{24}{3} = 8$ und $8 \times 4 = 32$, und dies ist der verlangte Quotient.

S. Dann ist die Division mit einem Bruche nicht schwer. Denn wenn man den Divisor so verändert, daß man seinen Zähler zum Nenner, und seinen Nenner zum Zähler macht, so kann man die Division verrichten, wenn man mit diesem Bruche multiplicirt.

L. Diese Bemerkung war sehr gut. Vermittelst derselben werden Sie jedes hieher gehörige Exempel zu rechnen im Stande seyn; und zugleich auf die kürzeste Art, wenn Sie gehörige Aufmerksamkeit anwenden. Dividiren Sie also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{4}{3}$.

S.

S. Dann multiplicire ich $\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ und der gesuchte Quotient ist also $\frac{5}{8}$.

L. Dividiren Sie ferner $3\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{6}$.

S. Hier multiplicire ich $3\frac{2}{3}$ durch $\frac{6}{5}$, oder $\frac{11}{3}$ durch $\frac{6}{5}$, und erhalte also $\frac{66}{15}$ oder $4\frac{2}{5}$.

L. Warum haben Sie nicht lieber mit dem Nenner 3 den Zähler 6 dividirt? Alsdann wäre das gesuchte $\frac{22}{5}$ oder $4\frac{2}{5}$ leichter gefunden worden. Dividiren Sie nun auch $20\frac{23}{45}$ durch $2\frac{2}{3}$.

S. Dann verwandele ich $2\frac{3}{5}$ zuvörderst in $\frac{13}{5}$, und dieses in $\frac{5}{13}$, und multiplicire nun $20\frac{23}{45}$ durch $\frac{5}{13}$. Da nun $20\frac{23}{45} = \frac{923}{45}$ und $\frac{923}{45} \times \frac{5}{13} = \frac{923}{117} = 7\frac{104}{117}$, oder $7\frac{8}{9}$, so ist dieses der gesuchte Quotient.

L. Um auch noch ein Paar Exempel aus der Buchstabenrechnung zu rechnen; so dividiren Sie auch 6a durch $\frac{e}{f}$.

S. $6a : \frac{e}{f}$ ist so viel als $6a \times \frac{f}{e}$ und also gleich $\frac{6af}{e}$.

L. Welches ist ferner der Quotient aus $\frac{6a}{b} : \frac{c}{d}$?

S. Das Factum aus $\frac{6a}{b} \times \frac{d}{c}$, oder $\frac{6ad}{bc}$.

L.

L. Und der Quotient aus $\frac{3abe + ce}{bf} : \frac{e}{f}$?

S. Das Factum aus $\frac{3abe + ce}{bf} \times \frac{f}{e}$ oder $\frac{3ab + c}{b}$.

L. Nun noch ein Paar Worte von der Resolution und Reduction der Brüche in Zahlen von einem niedern Grade. Die Resolution zuvörderst ist sehr leicht; denn man darf anstatt der Grösse des höhern Grades, wovon der gegebene Bruch einige Theile enthält, nur die ihr gleiche von dem verlangten niedern Grade nehmen, und den so erhaltenen reinen Bruch in einen gemischten Bruch oder eine ganze Zahl verwandeln. Sollen z. B. $\frac{3}{4}$ Rthlr. in Groschen resolvirt werden, so nimmt man anstatt 3 Rthlr. die ihnen gleichen 72 Gr. und verwandelt $\frac{72}{4}$ Gr. in 18 Gr. Wären ausserdem noch einige Grössen des niedern Grades da, die man nach der Resolution des Bruchs zu den gefundenen addiren müßte; so könnte das auch weiter keine Schwierigkeit verursachen. Wären z. E. $\frac{5}{6}$ Rthlr. und 2 Gr. in Groschen zu resolviren; so resolvirte man zuvörderst $\frac{5}{6}$ Rthlr. in 20 Gr. und addirte darauf die gegebenen 2 Gr. hinzu. Hiebey wollen wir uns daher nicht weiter aufhalten; es wird sich schon, wenn wir künftig bisweilen auf diese Art werden resolviren müssen, Gelegenheit finden,

finden, Sie darin zu üben, und das gesagte recht geläufig zu machen. Das aber muß ich noch berühren, daß man oft mit Vortheil zuvörderst einen von den Theilen, welche der zu resolvirende Bruch enthält, resolvirt, und das gefundene darauf mit dem Zähler des gegebenen Bruchs multiplicirt. So könnte man also $\frac{3}{4}$ Rthlr. resolviren, indem man zuvörderst $\frac{1}{4}$ Rthlr. in 6 Gr. verwandelte, und diese mit 3 multiplicirte. Da Sie nun auch bereits wissen, daß die Reduction gerade das Gegentheil vor der Resolution ist; so werden Sie für die Reduction einer Zahl in einen Bruch auch leicht den Schluß machen, daß man dieselbe durch die Division derjenigen Zahlen verrichte, mit welchen man in ähnlichen Fällen resolviren würde. Was sind also 18 Gr. von einem Thaler?

S. $\frac{18}{24}$ oder $\frac{3}{4}$.

L. Und 20 Loth von einem Pfund?

S. $\frac{20}{32}$ oder $\frac{5}{8}$.

L. Nun sind Sie im Stande, auch in benannten Zahlen die Division, wenn es erforderlich oder nützlich ist, mit den Factoren des Divisors zu verrichten. Denn wenn bey der Division des grössern Theils etwas übrig bleibt, so läßt sich solches, wie Ihnen erklärt worden, bruchweise ausdrucken, und der Bruch, den man so erhält, resolviren. Dividiren Sie also 596 Rthlr. 18 Gr. 8 Pf. durch 32, aber so, daß Sie statt 32 die Factoren 8 x 4 nehmen.

S.

S. (Rechnet.)

	596 Rthlr. 18 Gr. 8 Pf., dividirt durch 8
giebt	74 Rthlr. 14 Gr. 4 Pf., und dieses dividirt durch
4 giebt	18 Rthlr. 15 Gr. 7 Pf.

L. Wie haben Sie hier gerechnet?

S. Bey der Division der 596 Rthlr. durch 8 blieben $\frac{4}{8}$ Rthlr. übrig. Diese verwandelte ich in 12 Gr., und addirte die 2 Gr. hinzu, welche zum Quotienten der 18 Gr. durch 8 sich ergaben. Hier aber blieben noch $\frac{2}{8}$ Gr. oder 3 Pf. übrig, und diese 3 Pf. mit dem 1 Pf., welchen ich aus $\frac{8}{8}$ Pf. erhielt, haben die 4 Pf. gegeben. Ferner blieben bey der Division der 74 Rthlr. durch 4 zum Reste $\frac{2}{4}$ Rthlr. oder 12 Gr. Aus $\frac{14}{4}$ Gr. erhielt ich $3\frac{2}{4}$ Gr. oder 3 Gr. 6 Pf. Diese 3 Gr. mit den vorhergehenden 12 Gr. gaben die 15 Gr. im Exempel, so wie diese 6 Pf. mit den 1 Pf. aus $\frac{4}{4}$ Pf. die 7 Pf.

L. Sie haben das bisherige schnell und gut gefaßt; allein Sie dürfen es dabey nicht bewenden lassen, sondern Sie müssen nun, so oft es möglich ist, Sich in der Ausübung der erlernten Regeln zu üben suchen. Ob Sie das werden gethan haben oder nicht? Dieses zu bemerken werde ich in der Folge oft Gelegenheit haben, indem wir alles erlernte sehr oft gebrauchen werden. Wenn das geschieht, so werde ich denn auch Ihre bisher erworbene Kenntnisse noch immer mehr zu erweitern im Stande seyn, und mein Unterricht ist Ihnen als-

dann

dann vielleicht noch wichtiger, weil Sie alsdann deutlich sehen werden, wozu das erlernte dient. In unserer nächsten Unterredung werde ich mich nun mit Ihnen über eine Rechnungsart besprechen, von der Sie bisher noch gar nichts gehört haben, und von jetzt an wird überhaupt das wenigste von dem, worin ich Sie unterrichten werde, Ihnen schon bekannt gewesen seyn. Freuen Sie Sich also immerhin zum voraus auf sehr merkliche Erweiterungen ihrer Kenntnisse, zumal da die durchzunehmenden Gegenstände auch selbst wichtiger werden.

Zwanzigstes Gespräch.

L. Was verstehen Sie unter einer Dignität?

S. Ein Product aus gleichen Factoren.

L. Ist es genug zu einer Dignität, daß sie ein Product aus gleichen Factoren sey; oder muß auch die Anzahl der gleichen Factoren bestimmt werden?

S. Wenn von einer Dignität überhaupt die Rede ist, so ist es genug zu sagen, daß sie ein Product aus gleichen Factoren sey; wenn aber von einer bestimmten Dignität, z. E. der zweiten, dritten Dignität u. s. w. gesprochen wird, so muß auch die Anzahl der gleichen Factoren angegeben werden.

L. Und was versteht man also unter einer zweyten Dignität?

S. Ein Product aus zwey gleichen Factoren.

L. Und unter einer dritten Dignität?

S. Ein Product aus drey gleichen Factoren.

L. Merken Sie Sich nun die Namen Quadratzahl und Cubikzahl, denn ich werde sie oft gebrauchen, indem ich mich nun mit Ihnen über die 2te und 3te Dignität unterhalten werde. Unter jener versteht man nichts anders als die zweyte, so wie unter dieser die dritte Dignität einer Zahl. Um sich noch kürzer auszudrücken, nennt man auch eine Quadratzahl oder zweyte Dignität das Quadrat, und die Cubikzahl oder die dritte Dignität den Cubus einer Zahl. Was diesem nach die Benennungen Quadratwurzel und Cubikwurzel sagen wollen, bedarf wohl kaum einer Anzeige, indem in die Augen fällt, daß Quadratwurzel oder zweyte Wurzel, desgleichen Cubikwurzel oder dritte Wurzel einerley sey. Das erste, was wir uns von diesen Zahlen bekannt zu machen haben, ist die Art und Weise, jede gegebene Zahl zu einer Quadratzahl oder Cubikzabl zu erheben.

S. Das ist ja leicht. Wenn man eine Zahl zur Quadratzahl erheben will, so hat man nur nöthig, sie mit sich selbst zu multipliciren; und will man die Cubikzahl davon haben, so darf man uur das Quadrat noch einmal mit der Wurzel multipliciren.

L.

L. Welches ist also das Quadrat von 49?

S. (Rechnet.)

```
                  49
                  49
               -----
                 441
                196
               -----
(und antwortet)  2401
```

L. Auf eine kürzere Art können Sie das nicht rechnen?

S. Ich könnte auch mit den Factoren multipliciren, nemlich so

```
   49
 -----
  343     (7x49)
 -----
 2401     (7x343)
```

L. Welches das Quadrat von 49 sey, rechne ich eben so als die Quadrate von 19, 21, 29, 31, 39, 41 und vielen andern Zahlen ohne Mühe im Kopfe. Das Quadrat von 19 ist 361, das Quadrat von 21 aber 441; das Quadrat von 29 ist 841, das Quadrat von 31 hingegen 961; das Quadrat von 39 ist 1521, das Quadrat von 41 aber 1681.

S. Wie machen Sie denn das?

L. Ich fange von der Linken an zu multipliciren, und ziehe, was ich kann, in eins zusammen. Ueberlegen Sie, um dieselbe Art zu lernen,

recht genau, was Sie machen, wenn Sie eine zweytheilige Zahl mit sich selbst multipliciren. Nicht wahr, Sie multipliciren dann jeden Theil mit sich selbst, und beyde Theile zweymal mit einander?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja.

L. Und das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel besteht also aus dem Quadrate des ersten Theills, aus dem doppelten Producte beyder Theile und dem Quadrate des andern Theils?

S. Ja.

L. Und wenn der zweyte Theil 1 ist, so darf man also nur das Quadrat des ersten Theils suchen, und dazu das doppelte desselben und überdem 1 addiren. Vermittelst dieses Satzes kann man die Quadrate von 21, 31, 41, 51, 61 u. s. w. sehr leicht finden. Denn wenn man die Zehner in allen diesen Zahlen als den ersten Theil und 1 als den 2ten Theil betrachtet, so findet man das Quadrat der ganzen Zahl, wenn man zu dem Quadrate der Zehner ihr doppeltes und 1 addirt. Um z. B. das Quadrat von 61 zu finden, suche ich das Quadrat von 60, welches 3600 ist, und dazu addire ich 2x60 oder 120 und 1, und erhalte also 3721.

S. Auf diese Art ist es leicht. Allein eben so leichte findet man denn doch die Quadrate von 49, 59, 69 und dgl. nicht.

L. Auf eine etwas andere Art muß man freylich die Quadrate dieser Zahlen suchen, allein schwerer ist sie nicht. Doch nachher mehr hievon, denn Sie werden wohl bereits schon davon überzeugt seyn, daß es nützlich seyn wird, wenn wir die Art, eine gegebene Zahl zum Quadrate zu erheben, noch besonders untersuchen. Außer der Absicht, leichtere Wege zu finden, als die Multiplication bereits lehrt, kann man dabey auch die haben, daß man die Zusammensetzung des Quadrats aus den Theilen seiner Wurzel genau kennen lerne, und sich dadurch in den Stand setze, die Regeln einzusehen, nach welchen man von einem gegebenen Quadrate die Quadratwurzel finden kann. Um von dem leichtesten anzufangen, so wollen wir zuvörderst die eintheiligen Zahlen betrachten. Diese können zu der Ordnung 0 gehören, und sind

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

und ihre Quadrate

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Diese Quadrate enthält schon das Einmaleins, und sie sind daher billig als bekannt vorauszusetzen. Weiß man aber die Quadrate von den eintheiligen Zahlen, die zur Ordnung 0 gehören, so findet man auch sehr leicht eine Regel für die Findung der Quadrate derjenigen eintheiligen Zahlen, welche zu irgend einer Ordnung gehören, wenn man sich nur an die Regeln der Multiplication für der-

gleichen eintheilige Zahlen erinnert. Wie würden Sie Sich hier helfen?

S. Ich machte zuerst das Quadrat von der gegebenen Zahl, als wenn sie zur Ordnung 0 gehörte, und versetzte darauf das Product in eine noch einmal so hohe oder niedrige Ordnung, als worin die Wurzel gewesen wäre.

L. Also machten Sie das Quadrat von 900?

S. So daß ich erst das Quadrat von 9 oder 81 suchte, und darauf diese Zahl in die 4te Ordnung setzte, weil die Wurzei von der zweyten Ordnung ist.

L. Das Quadrat von 900 wäre also?

S. 810000.

L. Und wie würden Sie das Quadrat von 0,005 machen?

S. Ich suchte das Quadrat von 5, welches 25 ist, und versetzte diese Zahl in die 6te niedere Ordnung, indem die Wurzel zur dritten gehört.

L. Also wäre das Quadrat von 0,005?

S. 0,000025.

L. Sind Sie aber auch von der Richtigkeit Ihrer Regel überzeugt?

S. O ja. Denn wenn zwey Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, die beyde entweder zu einer höhern oder einer niedern Ordnung gehören, so sucht man zuvörderst das Product der Zahlen, als wenn sie zu keiner Ordnung gehörten, setzt aber das gefundene Factum darauf in die Ordnung

nung, welche man durch die Addition der Ordnungen der Factoren erhält. Da nun, wenn eine Zahl mit sich selbst multipliciret werden soll, die mit einander zu multiplicirende Ziffern gleich sind, so muß man ihr Quadrat suchen; und da jeder Factor zu einer und derselben Ordnung gehört, so muß das gedachte Quadrat zu der doppelt so hohen oder so niedrigen Ordnung gehören.

L. Also können Sie bey der Erhebung der Zahlen von einer höhern Ordnung sich auch des Mittels bedienen, daß Sie erst das Quadrat der Zahl selbst machen, und darauf noch einmal soviel Nullen anhängen, als die Wurzel hatte; bey der Erhebung einer Zahl von einer niedern Ordnung aber füllen Sie noch einmal soviel Stellen für die Zehntheiler aus, als die Wurzel enthielt. Nun lassen Sie a eine Zahl, b eine andere bedeuten, so daß also $a + b$ die Summe zweyer verschiedenen Zahlen oder eine zweytheilige Zahl anzeige, und a heiße der erste, so wie b der 2te Theil. Was erhalten Sie, wenn Sie $a + b$ mit sich selbst multipliciren

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array}$$

(und antwortet)

L. Also ist $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb$. Wie würden Sie dies nach den vorhin vestgesetzten Bedeutungen mit Worten ausdrucken?

S. Das Quadrat einer zweytheiligen Zahl besteht aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Producte beyder Theile und dem Quadrate des zweyten Theils.

L. Hier haben Sie also denselben Lehrsatz, von dessen Richtigkeit wir uns vorhin bereits überzeugt haben. Wie leicht wir ihn aber hier gefunden haben! Dies wäre also ein Beyspiel davon, daß man durch die Buchstabenrechnung im Stande ist, Sätze und Regeln auszurechnen, und Sie sehen, daß außer dem gewöhnlichen Rechnungsoperationen am Ende nur nöthig sey, das gefundene in Worten auszudrucken. Woraus wird nun aber das Quadrat einer Differenz zweyer Zahlen bestehen? Drucken Sie Sich eine Differenz eben so allgemein aus, als in $a + b$ eine Summe ausgedruckt worden ist, und multipliciren Sie diesen Ausdruck mit sich selbst.

S. Die Differenz zweyer Zahlen kann ich durch $a - b$ ausdrucken, und das Quadrat dieser Differenz finde ich also, wenn ich $a - b$ mit sich selbst multiplicire. Ich will es thun

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline aa - ab \\ - ab + bb \\ \hline aa - 2ab + bb \end{array}$$

Es ist also $(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$, oder das Quadrat einer Differenz zweyer Zahlen besteht aus den beyden Quadraten der gegebenen Zahlen, weniger dem doppelten Producte dieser Zahlen.

L. Ist nun nicht $49 = 50 - 1$?

S. Ja.

L. Und also doch auch $49^2 = (50-1)^2$?

S. Ja.

L. Wie groß ist also das Quadrat von 49?

S. So groß als das Quadrat von 50 nebst dem Quadrate von 1 weniger dem doppelten Producte beyder Theile, oder weil der zweyte Theil 1 ist, weniger dem doppelten ersten Theile; also $2500 + 1 - 100$ oder 2401. Nun weiß ich, wie Sie die Quadrate von 19, 29, 39, 4 u. s. w. so geschwinde haben finden können.

L. Wenn wir die gehabten beyden Sätze noch ferner betrachten, so führen Sie uns zu noch mehrern Vortheilen. Wenn man das Quadrat von a hat, so findet man das Quadrat von $a + b$, wenn man zu dem Quadrate von a das doppelte

Product aus a und b und das Quadrat von b setzt. Wie läßt sich dies in Worten ausdrucken?

S. Wenn man das Quadrat einer Zahl hat, und dazu noch eine andere setzt, so findet man das Quadrat beyder Zahlen zusammen genommen, wenn man zu dem Quadrate der ersten Zahl das doppelte Product beyder Zahlen und das Quadrat der andern Zahl hinzufügt.

L. Das Quadrat von 7 ist 49. Setzen Sie zur 7 noch 2 und machen Sie nach der angeführten Regel das Quadrat von 7 + 2 oder 9.

S. Dann setze ich zu 49 das doppelte
von 2x7 oder 28 und das Quadrat
von 2 oder 4 und erhalte also zum
Quadrate von 9 die Zahl 81.

L. Wie hätte man aber zu verfahren, wenn man das Quadrat von einer Zahl hätte, diese Zahl um eine andere verminderte, und nun aus dem gedachten Quadrate das Quadrat der Differenz machen wollte?

S. Wenn man das Quadrat einer Zahl hat, so findet man das Quadrat der Differenz zwischen dieser und einer andern Zahl, wenn man von dem gedachten Quadrate das doppelte Product beyder Zahlen abzieht, und zu dem gefundenen das Quadrat der andern Zahl addirt.

L. Wenn Sie also das Quadrat von 9 oder 81 haben, so finden Sie das Quadrat von 7 oder 9 — 2?

S. Wenn ich von dem Quadrate von 9 oder 81
das doppelte Product aus 2 und 9 oder 36 abziehe, u.
zu dem gefundenen 45
das Quadrat von 2 oder 4 addire.
Das Quadrat von 7 oder 9—2 ist also 49.

L. Wenn nun der hinzugekommene oder weggenommene Theil 1 ist, so nimmt man anstatt des doppelten Products das doppelte des ersten Theils, und anstatt des Quadrats der andern Zahl eins, und dann erhält man die Regeln, nach welchen ich vorhin verfuhr, und wobey ich so schnell das verlangte finden konnte, weil sowohl das Quadrat des ersten Theils als das doppelte desselben leicht zu finden war. Welches ist nun das Quadrat von 3?

S. 9.

L. Und das Quadrat von 30?

S. 900.

L. Nehmen Sie dies zu Hülfe, und suchen Sie nun das Quadrat von 37.

S. Dann muß ich zu dem Quadrate von 30 oder 900
das doppelte Product von 7x30 oder 420
und das Quadrat von 7 oder 49
setzen, und das Quadrat von 37 ist also 1369.

L. Wenn das Quadrat von 37 = 1369 ist, wie groß ist dann das Quadrat von 370?

S. 136900.

L. Nehmen Sie nun wieder dieses Quadrat zu Hülfe, und suchen Sie das Quadrat von 376.

S. Dann muß ich zu dem Quadrat von 370

oder	136900
das doppelte Product aus 370 und 6 oder	4440
und das Quadrat von 6 oder	36
setzen, und das Quadrat von 376 ist also	141376

L. Wie würden Sie sonst das Quadrat von 376 gemacht haben?

S. Ich hätte 376 auf diese Art mit sich selbst multiplicirt

$$\begin{array}{r} 376 \\ 376 \\ \hline 2256 \\ 2632 \\ 1128 \\ \hline 141376 \end{array}$$

L. Und diese Art wäre doch wohl bequemer gewesen, als wenn Sie erst das Quadrat von 3 gesucht, dasselbe darauf in das Quadrat von 30 verwandelt, zu diesem das doppelte Product aus 30 und 7 und das Quadrat von 7 addirt, die Summe von diesen allen gesucht, und so das Quadrat von 37 gefunden, ferner dieses in das Quadrat

drat von 370 verwandelt, dann wieder das doppelte Product aus 370 und 6, nebst dem Quadrate von 6 dazu addirt, und so endlich das Quadrat von 376 herausgebracht hätten?

S. Allerdings.

L. Allein angenommen, daß das Quadrat von 37 schon da gewesen wäre, und nun das Quadrat von 376 hätte gesucht werden sollen?

S. Dann wäre es besser gewesen, daß man das Quadrat von 37 in das Quadrat von 370 verwandelt, hiezu das doppelte Product aus 370 und 6 und das Quadrat von 6 addirt, und so das Quadrat von 376 gemacht hätte.

L. Dergleichen Fälle kommen nun aber nicht selten vor, und wir haben uns also auch um ihretwillen die befolgte Art das Quadrat einer Zahl zu finden zu merken. Allein noch kennen Sie nicht alle Vortheile dieser Art. Nehmen Sie einmal an, daß eine zweytheilige Zahl zum Quadrate zu erheben sey, deren erster Theil Zehner, der andere aber Einer enthielte. Man könnte bekannter Maaßen die zu suchenden Quadrate und das zu findende doppelte Product so erhalten, daß man zuvörderst beyde gedachte Theile als Einer betrachtete, und am Ende die Ordnung des gefundenen vestsetzte. Gesetzt nun, man wollte dies thun, zu was für einer Ordnung würde das Quadrat des höchsten Theils, das doppelte Product beyder Theile und das Quadrat des niedrigsten Theils gehören?

S.

S. Das Quadrat des höchsten Theils würde zur 2ten, das doppelte Product beyder Theile zur 1ten und das Quadrat des niedrigsten Theils zur Ordnung o gehören.

L. Also gehörte das doppelte Product beyder Theile zu einer um 1 niedrigern Ordnung als das Quadrat des höchsten dieser Theile und das Quadrat des niedrigsten Theils zu einer um 1 niedrigern Ordnung als das doppelte Product dieses Theils in den vorhergehenden?

S. Ja.

L. Gesetzt nun, daß der höchste Theil zu 6ten und der niedrigste zur 5ten Ordnung gehörte; wie würde sichs dann verhalten?

S. Dann gehörte das Quadrat des höchsten Theils zur 12ten, das doppelte Product beyder Theile zur 11ten und das Quadrat des niedrigsten Theils zur 10ten Ordnung.

L. Und wenn also überhaupt zwey Theile da sind, die zu zweyen unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen gehören?

S. Dann gehört das Quadrat des höchsten Theils zu einer noch einmal so hohen Ordnung als dieser Theil in der Wurzel, das doppelte Product beyder Theile zu einer um 1 niedrigern Ordnung als dieses Quadrat, und das Quadrat des niedrigsten Theils zu einer um 1 niedrigern Ordnung als dieses doppelte Product.

L.

L. Wenn Sie diese Sätze anwenden, so erleichtern Sie sich den vorhin gegangenen Weg sehr. Um z. B. das Quadrat von 37 zu finden, nimmt

man dann das Quadrat von 9
ferner 2x3x7 oder 42
und 7^2 oder 49

und addirt dieses alles, so daß also 1369 kommt.

Um nun ferner das Quadrat von 376 zu erhalten, nimmt man zuvörderst das Quadrat von 37 oder

1369
ferner 2x37x6 oder 444
und 6^2 oder 36, u.
erhält also zum Quadrat von 376

die Zahl 14136.

Warum vorhin die 42 und 49, und jetzt die 444 und 36 jede um eine Stelle weiter nach der Rechten gesetzt sind, als die vorhergehende Zahl, das erhellt aus dem so eben von Ihnen behaupteten Satze.

S. So ist es viel leichter zu rechnen, als wenn man jedesmal auf die Ordnungen der Ziffern, von welchen man entweder das Quadrat sucht, oder welche man mit einander multipliciret, sehen soll.

L. Gesetzt nun, daß sogleich das Quadrat von 376 gesucht werden sollte; so könnte man auf diese Art verfahren. Man suchet nach und nach

3^2 oder 9
2x3x7 — 42
7^2 — 49
2x37x6 — 444
6^2 — 36

und darauf die Summe 141376

S. Und auf diese Art könnte man ja wohl jede Zahl zum Quadrate erheben?

L. Warum nicht?

S. Lassen Sie mich doch diese Art versuchen.

L. So erheben Sie 68972 zum Quadrat.

S. Diese Zahl ist ja noch größer als 376.

L. Das thut nichts zur Sache; denn Sie fangen von der ersten Ziffer an, und setzen nach und nach dazu die folgenden, so daß jedesmal diejenigen, wovon Sie das Quadrat bereits gefunden haben, zusammen den ersten Theil ausmachen.

S. Ich suche also 6^2 oder 36
2x6x8 — 96
8^2 — 64
2x68x9 — 1224
9^2 — 81
2x689x7 — 9646
7^2 — 49
2x6897x2 — 27588
2^2 — — 4

und addire alle gefundene Zahlen, wo dann die Summe = 4757136784

L.

1. Ohne daß in dem gesuchten das geringste geändert würde, könnte man auch die Findung des doppelten Products zweyer Theile und des Quadrats des letzten Theils zusammen ziehen, indem man den ersten Theil doppelt nähme, neben dieses doppelte den zweyten Theil setzte, und dann alles mit dem 2ten Theile multiplicirte. Anstatt 2x6x8 erst besonders, und dann 8^2 zu suchen, nähme man also 2x6 oder 12, setzte daneben 8, und multiplicirte nun die 128 mit 8. Die nun gefundene Zahl aber müßte man um 2 Stellen zur Rechten hinausrucken. Mit dieser Abänderung wäre das vorhergehende Exempel

6^2	oder	36
128x8	—	1024
1369x9	—	12321
13787x7	—	96509
137942x2	—	275884
		4757136784

Daß 128x8 = 2x6x8 + 8^2 sey, vorausgesetzt, daß das Quadrat von 8 eine Ordnung niedriger ist, als das Product aus 2x6x8, fällt in die Augen. Dann da $8^2 = 8x8$ ist, so ist 2x6x8 + 8x8 = (2x6 + 8) x 8; und wenn man 2x6 + 8 so auflößt, daß man die 8 neben den Werth von 2x6 oder neben 12 schreibt, so wird diese Zahl um eine Ordnung höher hinaufgeruckt; und in 128x8 steckt also das Product 2x6x8, und 8^2,

aber 8^2 ist eine Zahl von einer um eins niedrigern Ordnung. Auf eben die Art kann man sich das übrige deutlich machen. Nun vergleichen Sie folgende Quadrate mit ihren Wurzeln

$$2^2 = 4.$$
$$20^2 = 400.$$
$$200^2 = 40000.$$
$$2000^2 = 4000000.$$

S. Wenn die Wurzel zehnmal grösser wird, so wird das Quadrat 100mal grösser, wird die Wurzel 100mal grösser, so wirds das Quadrat 10000mal, und wird die Wurzel 1000mal grösser, so wirds das Quadrat 1000000mal.

L. Und wie verhält sichs, wenn eine Wurzel 10, 100 oder 1000mal kleiner gemacht wird?

S. Dann wird auch das Quadrat kleiner, und zwar im ersten Fall 100, im andern 10000 und im 3ten 1000000mal.

L. Wenn man also das Quadrat einer Zahl weiß, und man will das Quadrat einer Zahl haben, die einigemal grösser oder kleiner ist; so darf man nur das Quadrat der Zahl suchen, welche anzeigt, um wie vielmal diese andere Zahl grösser oder kleiner ist, um darnach beurtheilen zu können, wie vielmal ihr Quadrat grösser oder kleiner sey, als das vorhingedachte. Wie werden Sie also das Quadrat von 4,625 suchen?

S. Da 4,625 tausendmal kleiner ist, als 4625, so suche ich das Quadrat von 4625, und mache dieses 1000000 kleiner, welches dadurch geschieht, daß ich 6 Stellen zur Rechten für die Zehntheiler abschneide.

L. Und also kann man, wenn man eine Zahl, die Zehntheiler enthält, zum Quadrate erheben soll, dieselbe anfänglich betrachten, als enthielte sie lauter ganze Zahlen, und so ihr Quadrat suchen; darauf aber von dem gefundenen noch einmal soviel Stellen für die Zehntheiler abschneiden, als die Wurzel enthält. Man kann sich diese Regel, wenn man will, auch leicht aus derjenigen ableiten, welche wir bey der Multiplication der Zehntheiler gehabt haben. Denn da man, wenn bey der Multiplication Zehntheiler in den gegebenen Zahlen vorkommen, und man anfänglich rechnet, als wenn dergleichen nicht da wären, in dem so gefundenen Producte soviel Stellen für die Zehntheiler abschneiden muß, als beyde gegebene Zahlen enthalten; so folgt natürlich, daß man, wenn man dasselbe bey der Multiplication einer ähnlichen Zahl mit sich selbst oder ihrer Erhebung zum Quadrate thun will, in dem so gefundenen Quadrate doppelt soviel Stellen für die Zehntheiler abschneiden müsse, als in der Wurzel statt gefunden haben. — Nun erheben Sie die Zahl 23007 auf die erlernte Art zum Quadrate.

S. Wenn ich an die Nullen komme, so darf ich doch dieselben übergehen, wenn ich nur das folgende gehörig setze?

L. Das können Sie freylich; allein, warum können Sie die Nullen übergehen? und wie müssen Sie das folgende darauf unter das vorhergehende setzen?

S. Habe ich das Quadrat von 23 gefunden, so erhalte ich das Quadrat von 230, wenn ich dazu 2 Nullen, und hieraus das Quadrat von 2300, wenn ich zu dem vorhin gedachten Quadrate abermals 2 Nullen setze. So oft ich also an eine Null komme, habe ich nicht nöthig das doppelte Product aus ihr und den vorhergehenden Zahlen und ihr Quadrat zu suchen, sondern ich hänge an das bereits gefundene zwey Nullen, und verfahre alsdann weiter wie gewöhnlich.

L. Oder Sie können auch ganz die Nullen übergehen, wenn Sie nur das folgende um zweymal soviel Stellen als Sie Nullen übergehen, weiter nach der Rechten hinausrucken.

S. Ich rechne also

2^2	ist	4
$2 \times 2 \times 3$	—	12
3^2	—	9
$2 \times 2300 \times 7$	—	32200
7^2	— —	49
und 23007^2 ist also gleich		529322049

L. Gesetzt nun, daß wir das Quadrat von $a + b$ oder $a^2 + 2ab + b^2$ wissen, und das Quadrat von $a + b + c$ finden wollen; so erhalten wie solches durch Hinzusetzung von $2(a + b)c + c^2$. Hiezu $2(a + b + c)d + d^2$ gesetzt, so erhält man das Quadrat von $a + b + c + d$, so wie durch die Vergrösserung dieses Quadrats mit $2(a + b + c + d)e + e^2$ das Quadrat von $a + b + c + d + e$ gefunden wird. Es ist also $(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 + 2(a + b + c + d)e + e^2$. Auf diese Art kann man den Satz finden, daß das Quadrat einer jeden aus Theilen bestehenden Wurzel zusammengesetzt sey, aus den Quadraten eines jeden Theils, und den doppelten Producten eines jeden Theils in die Summe aller vorhergehenden Theile. Wir wollen uns ihn merken; vielleicht kommt er uns in der Folge zu statten. — Wie erhebt man denn nun wohl einen Bruch zum Quadrate?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Dadurch daß man sowohl seinen Zähler als seinen Nenner zum Quadrat erhebt; denn auf diese Art hat man den gegebenen Bruch mit sich selbst multiplicirt.

L. Also ist das Quadrat von $\frac{3}{4}$?

S. $\frac{9}{16}$.

L. Und das Quadrat von $\frac{a}{b}$?

S. $\frac{aa}{bb}$ oder $\frac{a^2}{b^2}$.

L. Wie aber ein Product?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Dadurch daß man seine Factoren insgesammt zum Quadrat erhebt. Denn wenn man ein Product mit sich selbst multiplicirt, so sind in dem gesuchten Factum seine Factoren jeder zweymal enthalten, oder sie sind darinn zum Quadrat erhoben.

L. Also ist das Quadrat von ab?

S. a^2b^2.

L. Und das Quadrat von abcd?

S. $a^2b^2c^2d^2$.

L. Welches ist ferner das Quadrat von a^4?

S. a^8.

L. Und das Quadrat von a^6?

S. a^{12}.

L. Wie groß ist also der Logarithme des Quadrats einer Dignität?

S. Noch einmal so groß als der Logarithme der Wurzel; denn das Quadrat einer Zahl, die eine Dignität ist, muß noch einmal soviel Factoren enthalten, als die Zahl selbst.

L. Sollte uns dieser Satz nicht zu statten kommen, wenn Zahlen zum Quadrate zu erheben wären, die in solchen Dignitätenreihen, als wir

schon

schon zur Erleichterung der Multiplication und Division gebraucht haben, enthalten sind? *)

S. Allerdings; denn alsdenn suchte man nur ihren Logarithmen auf, verdoppelte ihn, und die Zahl, die neben diesem doppelt so grossen Logarithmen stünde, wäre das gesuchte Quadrat.

L. Welches ist also das Quadrat von 512? Bedienen Sie sich dieser Tabellen. (der Tabellen S. 257.)

S. 262144. Denn 572 ist die 9te Dignität don 2, und hievon ist die 18te Dignität von 2 das Quadrat.

L. Und das Quadrat von 177147?

S. Ist 31381059609, die 22te Dignität von 3, so wie 177147 die 11te ist.

L. Wir wollen uns diese Art, eine Zahl zum Quadrate zu erheben, merken, wenn wir gleich nicht allezeit, und bis jetzt noch sehr selten davon Gebrauch machen können. Nun noch eins. Wie ist das Quadrat einer positiven Wurzel beschaffen?

S. Ebenfalls positiv; denn bey der Erhebung einer positiven Wurzel zum Quadrat multiplicirt man eine positive Zahl mit einer positiven.

L. Und das Quadrat einer negativen Wurzel?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ist ebenfalls positiv; denn eine negative Zahl mit einer negati-

*) S. 257.

ven Zahl multiplicirt giebt ebenfalls ein positives Product.

L. Also ist das Quadrat von + 4?

S. + 16.

L. Und von — 4?

S. Auch + 16.

L. Man mag also von einer positiven oder von einer negativen Wurzel ausgehen, so ist das Quadrat, welches man erhält, allezeit eine positive Zahl; nie erhält man auf diesem Wege eine negative Grösse. — Soviel von der Erhebung der Zahlen zum Quadrat. In unserer nächsten Unterredung wollen wir uns auf eine ähnliche Art mit der Erhebung der Zahlen zu Cubiczahlen beschäftigen.

Ein und zwanzigstes Gespräch.

L. Was verstehen Sie unter einer dritten Dignität oder einer Cubiczahl?

S. Ein Product aus drey gleichen Factoren.

L. Und was ist die dritte Dignität oder der Cubus einer gegebenen Zahl?

S. Ein Product aus drey sowohl einander als der gegebenen Zahl gleichen Factoren.

L. Wenn man diese Erklärnng vor Augen hat, so sieht man bald, daß man, um den Cubus einer gegebenen Zahl zu finden, das Quadrat derselben suchen, und dieses Quadrat darauf nochmals mit der Wurzel multipliciren könne. Wie würden Sie hiernach 3648 zur Cubiczahl erheben?

S. Ich multiplicirte zuvörderst

	3648
mit sich selbst	3648
	29184
	14592
	21888
	10944
und das Quadr. davon	13307904
nochmals mit der Wurzel	3648
	106463232
	53231616
	79847424
	39923712
	48547233792,

und dieses Product ist die Cubiczahl von 3648.

L. Auf diese Art sucht man nun auch die Cubiczahlen der eintheiligen Wurzeln, wenn sie zur Ordnung o gehören, wirklich; und es sind daher

von 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
die Cubiczahlen
1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

 Allein

Allein diese Cubiczahlen muß man, nachdem man sie einmal gefunden hat, seinem Gedächtnisse einzuprägen suchen. Soll man aber die Cubiczahl einer eintheiligen Wurzel finden, die zu einer höhern oder niedern Ordnung gehört, so kann man sich diesen Weg verkürzen.

S. Ich weiß schon, wie man sich hier helfen kann. Man sucht alsdann den Cubus der gegebenen Zahl, als wenn sie zur Ordnung 0 gehörte, und hänget an das gefundene, wenn die Wurzel zu einer höhern Ordnung gehört, dreymal soviel Nullen, als in der Wurzel befindlich sind; wenn sie aber zu einer niedern Ordnung gehört, so füllt man dreymal soviel Stellen mit Zehntheilern an, als damit in der Wurzel angefüllt waren.

L. Da also der Cubus von 6 gleich 216 ist, so ist der Cubus von 60?

S. 216000.

L. Und der Cubus von 600?

S. 216000000.

L. Und der Cubus von 6000?

S. 216000000000.

L. Hingegen der Cubus von 0,6?

S. 0,216.

L. Und der Cubus von 0,06?

S. 0,000216.

L. Und endlich der Cubus von 0,006?

S. 0,000000216.

L. Man kann sich also hier die Regel machen, daß Zehner in der Wurzel im Cubus Tausende
Hunderte — — — Millionen
Tausende — — tausend Millionen;
hingegen Zehntheile — — Tausendtheile
Hunderttheile — — Millionentheile und
Tausendtheile — Tausendmillionentheile
geben. Auch ist leicht einzusehen, daß überhaupt, d. h. auch bey vieltheiligen Wurzeln, durch die Multiplication der Wurzel mit 10, 100, 1000 u. s. w. der Cubus 1000, 1000000, 1000000000mal u. s. w. vergrössert, hingegen durch die Division der Wurzel mit 10, 100, 1000 u. s. w. der Cubus 1000, 1000000, 1000000000mal u. s. w. verkleinert werde; und daß also, den Cubus einer vieltheiligen Zahl vorausgesetzt, der Cubus derselben Zahl, aber zu einer höhern oder niedern Ordnung erhoben, aus dem bekannten Cubus eben so gefunden werde, als es bereits von den eintheiligen Wurzeln gezeigt worden ist. Welches ist daher, da der Cubus von 3648 = 48547233,792 ist, der Cubus von 36480?

S. 48547233792000.

L. Und der Cubus von 3648000?

S. 48547233792000000000.

L. Hingegen der Cubus von 364,8,

S. 48547233,792.

L. Und der Cubus von 3,648?

S.

S. 4895,4723372.

L. Nun erheben Sie a + b zum Cubus.

S. Dann multiplicire ich

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & a & + b & & \\
\text{mit sich selbst} & a & + b & & \\
\hline
 & aa & + ab & & \\
 & & + ab & + bb & \\
\hline
\text{und das Quadrat} & aa & + 2ab & + bb & \\
\text{nochmals mit der Wurz.} & a & + b & & \\
\hline
 & aaa & + 2aab & + abb & \\
 & & + aab & + 2abb & + bbb \\
\hline
\text{u. bekomme zum Cub.} & aaa & + 3aab & + 3abb & + bbb
\end{array}
$$

L. Nennen Sie a den ersten und b den zweyten Theil der Wurzel, so daß a + b eine zweytheilige Wurzel vorstelle, und drucken Sie nun mit Worten aus, woraus der Cubus einer zweytheiligen Wurzel bestehe.

S. Der Cubus einer zweytheiligen Wurzel bestehet aus dem Cubus des ersten Theils, aus dem dreyfachen Producte des Quadrats des ersten Theils in den zweyten, aus dem dreyfachen Producte des ersten Theils in das Quadrat des zweyten, und aus dem Cubus des zweyten Theils.

L. Hier haben wir einen ähnlichen Satz, als in der Lehre von der Erhebung einer Zahl zum

Qua=

Quadrate, und wir können davon auch einen ähnlichen Gebrauch machen. Wie wohl?

S. Wenn ich den Cubus einer zweytheiligen Zahl finden soll, so suche ich

1. den Cubus des 1ten Theils.
2. das 3fache Product des Quadrats des ersten Theils in den 2ten Theil.
3. das 3fache Product des ersten Theils in das Quadrat des andern Theils und
4. den Cubus des 2ten Theils, und addire darauf alles gefundene zusammen.

L. Suchen Sie auf diese Art den Cubus von 5 + 4, welches der Cubus von 9 seyn wird.

S. Dann nehme ich

1. 5^3 oder 125
2. $3 \times 5^2 \times 4$ — 300
3. $3 \times 5 \times 4^2$ — 240
4. 4^3 — 64 und suche

die Summe 729.

L. Ferner suchen Sie den Cubus von 34, aber so, daß Sie Sich 34 als 30 + 4 vorstellen.

S. Dann suche ich

1. 30^3 oder 27000
2. $3 \times 30^2 \times 4$ — 10800
3. $3 \times 30 \times 4^2$ — 1440
4. 4^3 — — 64 und

darauf die Summe 39304

L.

L. Gesetzt, daß Sie nun den Cubus von 340 suchen sollten; was würden Sie thun?

S. Ich setzte zu dem Cubus von 34 noch drey Nullen, so daß ich 39304000 erhielte.

L. Welches ist nun der Cubus von a?

S. aaa.

L. Und der Cubus von a + b?

S. aaa + 3aab + 3abb + bbb.

L. Angenommenen also, daß man bereits den Cubus einer Zahl gefunden habe, daß darauf zur Wurzel ein Theil gesetzt werde, und man aus dem gefundenen Cubus nun den Cubus der vergrösserten Wurzel finden solle; was hat man alsdann dem Cubus des ersten Theils der Wurzel noch zuzusetzen?

S. Das 3fache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den hinzugesetzten Theil, ferner das 3fache Product des ersten Theils in das Quadrat des hinzugesetzten Theils, und endlich den Cubus dieses neuen Theils.

L. Der Cubus von 340 ist 39304000. Was müssen Sie also zu diesem Cubus setzen, um den Cubus von 346 oder 340 + 6 zu finden

S. Erstlich $3 \times 340^2 \times 6$ oder 2080800
2. $3 \times 340 \times 6^2$ — 36720
und 3. 6^3 — 216.

L.

L. Also wäre $340^3 = 39304000$

$$3 \times 340^2 \times 6 = 2080800$$
$$3 \times 340 \times 6^2 = 36720$$
$$6^3 = 216$$

und also $346^3 = 41421736$.

Hieraus könnten Sie nun leicht auf eine ähnliche Art dem Cubus von 3460, und dann den Cubus von $3468 = 3460 + 8$ finden, und wenn es verlangt würde, auf diesem Wege noch weiter fortgehen. Allein wir wollen zuvörderst sehen, ob wir nicht, eben so als bey der Erhebung der Zahlen zu Quadraten, bey dem Suchen der Cubiczahlen und der Producte der Theile anfänglich die Ordnung dieser Theile aus der Acht lassen können. Angenommen also, daß eine zweytheilige Wurzel zum Cubus zu erheben ist, wovon der erste Theil Zehner und der andere Einer enthält; zu was für einer Ordnung gehört in diesem Falle der Cubus des ersten Theils?

S. Zu der dritten, weil Zehner in der Wurzel im Cubus Tausende geben.

L. Und das 3fache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den andern?

S. Zu der zweyten Ordnung; denn die Zehner in der Wurzel geben im Quadrate Hunderte, und durch die Multiplication einer Zahl mit Einern wird in der Ordnung nichts geändert.

L. Ferner das 3fache Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des andern Theils?

S. Zu der ersten Ordnung. Denn Einer geben im Quadrate Einer, und diese mit Zehnern multiplicirt geben im Producte Zehner.

L. Endlich der Cubus der Einer?

S. Zu der Ordnung 0, denn Einer mit Einern multiplicirt geben Einer.

L. Also ist das 3fache Product des Quadrats des ersten Theils in den zweyten Theil eine Ordnung niedriger als der Cubus des ersten Theils; das 3fache Product des ersten Theils in das Quadrat des andern Theils eine Ordnung niedriger als das 3fache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten Theil, und der Cubus des zweyten Theils wieder um eine Ordnung niedriger, als das 3fache Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten Theils. Wenn man also bey der Erhebung einer zweytheiligen Wurzel, davon der erste Theil Zehner, der andere Einer enthält, die zu suchenden Cubiczahlen und Producte in der beobachteten Folge sucht, und jedes folgende eine Stelle weiter zur Rechten hinaussetzt, so kann man die Ordnung der Theile aus der Acht lassen. Hiernach erhebe ich 34 auf diese Art zum Cubus. Ich suche

$3^3 = 27$
$3 \times 3^2 \times 4 = 1\ \ 108$
$3 \times 3 \times 4^2 = 1\ \ 144$
$4^3 = 64$

und addire nun 39304

S. So ist es viel leichter, als wenn man auf die Ordnungen der Theile sehen muß.

L. Man kann diese Regel auch noch erweitern. Denn wenn man eine zweytheilige Wurzel, deren einer Theil Zehner und der andere Einer enthält, mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, so wird der Cubus, und also auch alle die Theile, woraus er zusammengesetzt ist, 1000, 1000000, 1000000000mal u. s. w. grösser als vorhin; und wenn man die gedachte Wurzel durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt, so wird der Cubus, und also auch alle die Theile, woraus er zusammengesetzt ist, 1000, 1000000, 1000000000mal u. s. w. kleiner als vorhin. Wenn man nun eine Wurzel, deren einer Theil Zehner, der andere aber Einer enthält auf die gedachte Art entweder multiplicirt oder dividirt, so erhält man eine Wurzel, von deren Theilen der zweyte um eine Ordnung niedriger ist als der erste; und so lange dieses nur statt findet, ist das dreyfache Product aus dem Quadrate des höchsten Theils in den niedrigern eine Ordnung niedriger als der Cubus des höchsten Theils, ferner das dreyfache Product aus dem höch-

 sten

sten Theile in das Quadrat des niedrigern Theils eine Ordnung niedriger als das dreyfache Product aus dem Quadrate des höchsten Theils in den niedrigern, und endlich der Cubus des niedrigsten Theils eine Ordnung niedriger als das dreyfache Product aus dem höchsten Theile in das Quadrat des niedrigern Theils. Man kann also bey der Erhebung einer jeden zweytheiligen Wurzel, deren Theile zu unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen gehören, zum Cubus, anfänglich über die Ordnungen der Theile wegsehen, den Cubus auf die gezeigte Art suchen, und am Ende die Ordnung des gefundenen nach der bereits erklärten Regel bestimmen. Suchen Sie hiernach den Cubus von 8600.

S. Ich suche

1.	8^3	=	512
2.	$3 \times 8^2 \times 6$	=	1152
3.	$3 \times 8 \times 6^2$	=	864
4.	6^3	=	216

addire nun 636056, und hänge 6 Nullen an. Der gesuchte Cubus ist also 636056000000.

L. Wenn Sie aber den Cubus von 0,086 suchen sollten?

S. Dann suchte ich, wie ich bereits gethan habe, den Cubus von 86 oder 636056, und schnit-

te

te nun 9 Stellen für die Zehntheile ab. Der verlangte Cubus wäre also 0,000636056.

L. Nun sind wir im Stande den Cubus einer jeden vieltheiligen Wurzel auf eine ähnliche Art zu finden, als wir bereits den Cubus einer zweytheiligen Wurzel gefunden haben. Zum Beyspiele diene folgendes Exempel. Wenn der Cubus von 46532 gesucht werden soll; so kann man suchen

$$\begin{array}{rcr}
4^3 & = & 64 \\
3 \times 4^2 \times 6 & = & 288 \\
3 \times 4 \;\, \times 6^2 & = & 432 \\
6^3 & = & 216 \\
3 \times 46^2 \times 5 & = & 31740 \\
3 \times 46 \;\, \times 5^2 & = & 3450 \\
5^3 & = & 125 \\
3 \times 465^2 \times 3 & = & 1946025 \\
3 \times 465 \times 3^2 & = & 12555 \\
3^3 & = & 27 \\
3 \times 4653^2 \times 2 & = & 129902454 \\
3 \times 4653 \;\, \times 2^2 & = & 55836 \\
2^3 & = & 8 \\
\hline
\text{und nun addiren} & & 100752343880768
\end{array}$$

Man verfährt hier nemlich, als ob anfänglich blos der Cubus des höchsten Theils, der 4, zu suchen wäre. Hat man diesen gefunden, so nimmt man die folgende Zahl als einen hinzugekommenen Theil der Wurzel an, und setzt also zu dem Cubus des ersten Theils das 3fache Product aus dem Quadrate

des ersten Theils in den hinzugekommenen Theil, das 3fache Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des neuen Theils und endlich den Cubus des neuen Theils. Ist man so weit gekommen, so betrachtet man beyde Zifern, deren Cubus gefunden worden ist, als den ersten Theil, und die folgende Zifer als einen neuen Theil, und verfährt auf eine der eben beschriebenen ähnliche Art, und dann ferner auf gleiche Weise, bis man alle Theile der gegebenen Wurzel genommen hat. Wenn die Theile der Wurzel von der Art sind, daß der folgende immer um eine Ordnung niedriger ist als der vorhergehende, so betrachtet man einen jeden bey diesem Geschäfte als Einer, setzt aber von den gefundenen Cubiczahlen oder dreyfachen Producten ein jedes eine Stelle weiter nach der Rechten als das vorhergehende. — Wie würden Sie Sich aber verhalten, wenn in der Mitte Nullen vorkämen? z. B. wenn Sie auf diese Art den Cubus von 23004 machen sollten?

S. Ich verführe, so lange bis ich an die Nullen käme, so wie Sie vorher; dann aber setzte ich dreymal soviel Nullen an das gefundene, als Nullen in der Wurzel wären, und führe darauf auf die erklärte Art fort.

L. Erheben Sie also 23004 zum Cubus.

S.

S. Ich suche

$2^3 =$	8
$3 \times 2^2 \times 3$	36
$3 \times 2 \times 3^2$	54
und hänge 3^3	27000000
an dies letzte 6 Nullen an	
$3 \times (2300)^2 4$	36480000
$3 \times 2300 \times 4^2$	110400
4^3	64
und addire endlich	12170649104064

L. Wenn nun der Cubus von 23004 gleich ist 12170649104064; welches wird dann der Cubus von 2300400 seyn?

S. 12170649104064000000.

L. Und der Cubus von 23,004?

S. 12170,649104064.

L. Angenommen nun, daß die Wurzel mit + bezeichnet sey; was für ein Zeichen muß dann der Cubus haben?

S. Auch +; denn er ist alsdann ein Product aus 3 mit + bezeichneten Factoren.

L. Wenn aber die Wurzel — hat?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Dann hat der Cubus —. Denn wenn man die Wurzel einmal mit sich selbst multiplicirt, so erhält man +, und multiplicirt man noch einmal mit der Wurzel, so kommt —.

L. Also ist der Cubus in Ansehung der Zeichen immer mit der Wurzel von einerley Art. Welches ist nun aber der Cubus von a?

S. a^3.

L. Aber von $a + b$?

S. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

L. Und von $a + b + c$?

S. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$.

L. Ferner von $a + b + c + d$?

S. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$.

L. Wir können auf diese Art so weit fortgehen als wir wollen, und wir sehen hieraus, daß der Cubus einer vieltheiligen Wurzel, aus den Cubikzahlen eines jeden Theils, aus den 3fachen Producten eines jeden Theils in das Quadrat aller vorhergehenden, und aus den 3fachen Producten des Quadrats eines jeden Theils in alle vorhergehende bestehe. Dieser Satz stimmt mit dem, was wir bisher bey der Erhebung der Zahlen zur 3ten Dignität zum Grunde gelegt haben, vollkommen überein, nur daß bey den Zahlen die Ordnungen der Theile der Wurzel noch einen Einfluß haben. Wie würden Sie endlich wohl den Cubus eines Bruchs finden?

S.

S. (Nach einigem Nachdenken.) So daß ich sowohl seinen Zähler als seinen Nenner zum Cubus erhöbe.

L. Welches ist also der Cubus von $\frac{3}{4}$?

S. $\frac{27}{64}$.

L. Und der Cubus von $\frac{a}{b}$?

S. $\frac{a^3}{b^3}$.

L. Hiebey wollen wir es jetzt bewenden lassen, und künftig die Art und Weise zu lernen suchen, aus einer gegebenen Zahl die Quadrat- und Cubikwurzel zu finden.

Zwey und zwanzigstes Gespräch.

L. Bisher haben wir die Erhebung gegebener Zahlen zu Quadrat und Cubikzahlen betrachtet; nun müssen wir die Regeln kennen zu lernen suchen, nach welchen man aus gegebenen Zahlen ihre Quadrat- und Cubikwurzeln findet. Heute wollen wir die Ausziehung der Quadratwurzeln betrachten. Was verstehen Sie also unter der Quadratwurzel einer gegebenen Zahl?

S. Eine Zahl, die mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl giebt.

L. Hiernach ist die Quadratwurzel von 16?

S. 4, denn 4x4 ist 16.

L. Und die Qundratwurzel von 81?

S. 9, denn 9x9 ist 81.

L. Aber die Quadratwurzel von 72?

S. Von 72 läßt sich keine Quadratwurzel angeben; denn 8 ist zu klein, weil 8x8 nur 64, und 9 zu groß, weil 9x9, 81 ist.

L. Das ist doch aber ausgemacht, daß, wenn es eine Quadratwurzel von 72 giebt, dieselbe grösser als 8 und kleiner als 9 seyn, oder zwischen 8 und 9 fallen müsse.

Ja.

L. Vielleicht ist daher $8\frac{1}{2}$ die Quadratwurzel von 72?

S. Da habe ich gar nicht daran gedacht, daß man die Quadratwurzel in Brüchen angeben könne. Ich will also versuchen, ob $8\frac{1}{2}$ die Quadratwurzel von 72 sey. $8\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = \frac{17}{2} \times \frac{17}{2} = \frac{289}{4} = 72\frac{1}{4}$. $8\frac{1}{2}$ ist noch zu groß zur Quadratwurzel von 72.

L. Nach diesem Versuche kennen wir aber die Quadratwurzel von 72 doch schon genauer als vorhin. Vorhin wußten wir nur, daß sie zwischen 8 und 9 falle, jetzt aber, daß sie zwischen 8 und $8\frac{1}{2}$ liegen müsse.

S. Vielleicht ist sie $8\frac{1}{4}$?

L.

L. Versuchen Sie es.

S. $8\frac{1}{4} \times 8\frac{1}{4} = \frac{1089}{16} = 68\frac{1}{16}$. $8\frac{1}{4}$ ist zu klein zur Wurzel von 72, denn $8\frac{1}{4} \times 8\frac{1}{4}$ ist nur $68\frac{1}{16}$.

L. Also wissen Sie auch durch diesen Versuch die Quadratwurzel von 72 noch nicht; aber das doch, daß sie grösser als $8\frac{1}{4}$ und kleiner als $8\frac{1}{2}$ seyn müsse?

S. Ja das weiß ich, und ich könnte, wenn ich weiter fortfahren sollte zu rathen, sie endlich finden, oder doch noch genauer bestimmen.

L. Das letzte steht allerdings in ihrer Gewalt; allein das erste nicht. Denn wenn man von einer ganzen Zahl die Quadratwurzel nicht ebenfalls in ganzen Zahlen finden kann, so findet man sie auch nie ganz genau in Brüchen. Nachher werde ich Sie von diesem Satze völlig zu überzeugen suchen, jetzt berühre ich ihn nur. Allein wenn man nun auch in dem beschriebenen Falle die Quadratwurzel nicht genau finden kann, so hat dieselbe doch ihre bestimmte Grösse, so daß man wenigstens anzuzeigen im Stande ist, zwischen was für Zahlen sie falle, und dies kann man so weit treiben, daß das fehlende in keine Betrachtung gezogen zu werden verdient. Doch wir müssen etwas tiefer eindringen. Die Quadratwurzel, welche man suchen soll, ist also entweder eintheilig; oder sie besteht aus zwey oder aus noch mehreren Theilen; und wenn sie eintheilig ist, so gehört sie

entweder zu der Ordnung 0, oder zu einer von den höhern oder niedern Ordnungen. Lassen Sie uns nun alle diese Fälle genauer betrachten. Wenn also die Wurzel eintheilig ist, und zu der Ordnung 0 gehört, so findet man dieselbe, wenn man sich die Quadrate der eintheiligen Zahlen von der Ordnung 0 bekannt gemacht hat, leicht, und zwar entweder genau, oder doch so, daß man angeben kann, zwischen was für Zahlen sie falle. Welches ist z. B. die Quadratwurzel von 49?

S. 7.

L. Aber die Quadratwurzel von 69?

S. Diese fällt zwischen 8 und 9.

L. Es kommt also hier nur auf die Bestimmung an, wenn eine gegebene Zahl nur eine eintheilige Wurzel habe? Die Antwort hierauf ist, wenn sie selbst aus nicht mehr als aus zwey Zifern besteht, denn die kleinste dreytheilige Zifer ist 100, und davon ist die Quadratwurzel 10. Wie nun aber, wenn die Wurzel zwar eintheilig ist, aber zu einer höhern oder niedern Ordnung gehört? Wie groß ist die Ordnung des Quadrats einer Zifer?

S. Noch einmal oder doppelt so groß als die Ordnung der Wurzel.

L. Und also die Ordnung der Wurzel?

S. Halb so groß als die Ordnung des Quadrats.

L.

L. Dies vorausgesetzt, so darf man nur von der gegebenen Zahl die Ordnung anfänglich aus der Acht lassen, von ihr nach dem vorhergehenden die Wurzel suchen, und diese in der halb so grossen Ordnung nehmen. Welches ist also die Quadratzel von 1600?

S. 40.

L. Warum?

S. Von 16 ist die Wurzel 4; weil aber 16 in 1600 zur zweyten höhern Ordnung gehört, so muß die 4 in der Wurzel eine Zahl der 1ten höhern Ordnung seyn.

L. Welches ist ferner die Quadratwurzel von 0,0064?

S. 0,08.

L. Warum?

S. Die Wurzel von 64 ist 8; weil aber 64 in 0,0064 zur 4ten niedern Ordnung gehört, so muß die 8 in der Wurzel eine Zifer der 2ten niedern Ordnung seyn.

L. Welches ist ferner die Wurzel von 4000?

S. Hier kann ich doch schwerlich von 4 die Wurzel suchen, und dieselbe in der halb so grossen Ordnung nehmen, denn sonst käme 2 in der Ordnung $1\frac{1}{2}$, und dergleichen Ordnungen giebt es nicht.

L.

L. Sie müssen in dergleichen Fällen die Zahl, von welcher Sie die Quadratwurzel suchen wollen, um die gebrochenen Ordnungen zu vermeiden, in einer solchen Ordnung nehmen, daß die Zahl dieser Ordnung eine gerade Zahl ist.

S. Also suche ich die Quadratwurzel von 40, und betrachte diese als eine Ziffer der 1ten höhern Ordnung?

L. Ganz recht.

S. Also fällt die Quadratwurzel von 4000 zwischen 6 und 7 von der 1ten höhern Ordnung, oder zwischen 60 und 70.

L. Welches ist nun die Quadratwurzel von 0,006.

S. Die Quadratwurzel von 0,006 fällt zwischen 0,7 und 0,8.

L. Wie so?

S. Da 6 in 0,006 zu der 3ten niedern Ordnung gehört, so nehme ich an ihrer Stelle, um eine gerade Ordnung zu erhalten, 0,0060 oder 60 von der 4ten niedern Ordnung, und suche hieraus nach der angeführten Regel die Quadratwurzel.

L. Ob nun die eintheilige Quadratwurzel einer Zahl zu einer höhern oder niedern Ordnung gehöre, ist leicht zu beurtheilen. Es findet sol-

ches statt, sobald die gegebene Zahl durch eine Zahl ausgedruckt ist oder werden kann, die zu einer Ordnung gehört, deren Zahl eine gerade Zahl ist. Nun also zu den zweytheiligen Wurzeln. Sie wissen, woraus das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel besteht; nemlich?

S. Aus dem Quadrate des 1ten Theils, aus dem doppelten Producte beyder Theile und aus dem Quadrate des 2ten Theils.

L. Wie würde man hiernach wohl die Redensart, eine zweytheilige Wurzel aus einer gegebenen Zahl finden, erklären können?

S. Aus einer gegebenen Zahl eine zweytheilige Wurzel finden, heißt eine zweytheilige Zahl finden, wovon das Quadrat des ersten Theils nebst dem doppelten Producte beyder Theile und dem Quadrate des andern Theils der gegebenen Zahl gleich ist.

L. Diese Erklärung wird uns bey der Extraction nicht nur der zweytheiligen, sondern überhaupt der mehrtheiligen Quadratwurzeln sehr zu statten kommen. Ehe wir sie indeß dazu benutzen, müssen wir noch einige andere Betrachtungen anstellen. Das Quadrat von 37 haben wir auf folgende Art gemacht. Wir suchten

$$\begin{array}{rcr} 3^2 & \text{oder} & 9 \\ 2\times3\times7 & — & 42 \\ 7^2 & — & 49 \\ \hline \end{array}$$

und hievon die Summe 1369. Ferner um das Quadrat von 376 zu erhalten suchten wir

$$\begin{array}{rcr} 3^2 & — & 9 \\ 2\times3\times7 & — & 42 \\ 7^2 & — & 49 \\ 2\times37\times6 & — & 444 \\ 6^2 & — & 36 \\ \hline \end{array}$$

und dann hievon die Summe 41376.

Sowohl, wenn wir dergleichen Exempel betrachten, als auch aus den Sätzen von den Quadraten der Zahlen, die zu einer höhern oder niedern Ordnung gehören, erhellet, daß die Quadrate solcher Theile, die zu unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen gehören, um zwey Ordnungen von einander verschieden sind. In den vorhergehenden Exempeln z. B. ist das Quadrat von 7 um 2 Ordnungen niedriger als das Quadrat von 3, und das Quadrat von 6 um 2 Ordnungen niedriger als das Quadrat von 7. Hieraus folgt, daß, wenn man eine gegebene Quadratzahl von den Einern an in Classen theilt, davon eine jede bis auf die letzte, die auch nur eine Zifer enthalten kann, aus zwey Zifern besteht, mit einer jeden Classe sich auch das Quadrat eines Theils endige, und also die gegebene Quadratzahl eine so vieltheilige Wurzel haben

ben müsse, als sie bey dieser Eintheilung Classen hat. Ferner ist in der 1ten Classe zur Linken das Quadrat des höchsten Theils und überdem auch oft etwas von dem doppelten Producte des 1ten Theils in den 2ten; in der 1ten Classe und der 1ten Zifer der 2ten Classe das Quadrat des 1sten Theils und das doppelte Product des 1ten und 2ten Theils und überdem auch wohl etwas dem Quadrate des andern Theils, in der 1ten und 2ten Classe das Quadrat des 1ten Theils, das doppelte Product des 1ten und 2ten Theils und das Quadrat des andern Theils, und überdem auch wohl etwas von dem doppelten Producte der beyden ersten Theile in den 3ten enthalten, u. s. w. Dies vorausgesetzt, so wollen wir die Zahl 141376 auf die vorhin gedachte Art in Classen theilen, wodurch wir erhalten

14|13|76|

Wie viel Theile wird also die Quadratwurzel dieser Zahl haben?

S. Drey, denn wir haben 3 Classen erhalten.

L. Da nun in 14 das Quadrat des ersten oder höchsten Theils steckt, so ist es leicht, diesen Theil zu finden. Welches wird er seyn?

S. 3.

L. Das Quadrat davon oder 9, wollen wir nun von der ersten Classe abziehen, und alsdann erhalten wir das, was von dem doppelten Pro-

ducte

ducte dieses Theils und des folgenden in der ersten Classe steckt; zugleich wollen wir uns den gefundenen Theil merken. Hier ist es geschehen

14|13|76|3
9
—
5

Setzen wir nun wie hier

14|13|76|3
9 1
—
5.

zu dem gebliebenen Reste die 1te Zifer der folgenden Classe, so erhalten wir eine Zahl, worin das doppelte Product aus dem 1ten Theile in den 2ten enthalten ist; und da wir den ersten Theil bereits kennen, so wird es leicht seyn, hieraus nun auch den 2ten Theil selbst zu finden. Wie meinen Sie wohl?

S. Man muß den 1ten Theil doppelt nehmen, und damit dividiren.

L. Gut; hier dividiren wir also die 57 durch 2 x 3 oder 6, und erhalten also zum 2ten Theile?

S. 8.

L. Diese Zahl ist etwas zu groß, wie Sie bald sehen werden. Wir wollen also zum Quotienten 7 annehmen, und dies wäre nun der 2te Theil der gesuchten Wurzel. Das doppelte Product aus ihm und dem vorhergehenden Theile steckt in dem Reste der 1ten Classe und der 1ten Zifer der 2ten Classe, also in 51, und sein Quadrat in diesen

sen 51 und der folgenden Zifer der 2ten Classe. Gesetzt also, daß wir den Divisor 6 mit dem neuen Theile 7 multipliciren, und das Product 42 gerade unter die gedachten 51 setzen, dann das Quadrat von ihm, oder 49 eine Stelle hinausrucken, so zu den 42 addiren und diese Summe von dem Reste der ersten Classe und der ganzen 2ten Classe abziehen; so bleibt etwas von dem doppelten Producte der zwey ersten Theile in den 3ten übrig, im Fall nemlich etwas übrig bleibt. Hier ist alles geschehen

14|13|76|37
9
―――
513
(6)
42
49
―――
469
―――
44

Da nun in diesem Reste, verbunden mit der 1ten Zifer der folgenden Classe, das doppelte Product der beyden vorhergehenden Theile in den dritten steckt, so werden Sie wohl sehen, wie man nunmehr auch den 3ten Theil der Wurzel finden könne.

S. Ich setze die erste Zifer der folgenden Classe zu dem gebliebenen Reste, und dividire beydes durch die beyden gefundenen Theile der Wurzel doppelt genommen, oder 447 durch 74.

L. Und der Quotient ist?

S. 6.

L. Verfährt man nun mit diesem eben so, als vorhin mit der 7; so wird das ganze Exempel

```
14|13|76|376
  9
------
 513
 (6)
  42
   49
------
  469
--------
   4476
   (74)
   444
     36
--------
   4476
--------
      0
```

Daß die gefundene Wurzel 376 die wahre Quadratwurzel sey, erhellet daraus, weil die gegebene Zahl das Quadrat eines jeden Theils derselben und das doppelte Product eines jeden Theils in alle vorhergehende enthält, denn eben dies hat man ja nach und nach von der gegebenen Zahl abgezogen. Es fällt aber auch in die Augen, daß man, wenn die Wurzel aus noch mehrern Theilen besteht, nichts weiter nöthig habe, als auf die gezeigte Art immer weiter fortzufahren, und daß, wenn die letzte Classe der gegebenen Zahl Einer enthält, man bey diesem

Ver-

Verfahren über die Ordnungen der Zahlen wegsehen könne. Nunmehr können die Regeln für die Extraction der Quadratwurzeln, ausführlich vorgetragen, keine Schwierigkeit weiter haben. Sie sind:

1. Man theile die gegebene Zahl von den Einern an in Classen, so daß in jede derselben zwey Zifern zu stehen kommen, doch kann die erste zur Linken auch nur eine Zifer enthalten.

2. Suche man ein Quadrat, welches der ersten Classe zur Linken gleich ist, oder ihr am nächsten kömmt, ziehe dieses Quadrat von der gedachten ersten Classe ab und merke sich die Wurzel desselben als den ersten Theil der gesuchten Quadratwurzel.

3. Zu dem gebliebenen Reste setze man die erste Zifer der folgenden Classe, ferner darunter den gefundenen Theil der Wurzel doppelt genommen, dividire damit in die darüber stehende Zifern, und merke den Quotienten als den zweyten Theil der gesuchten Quadratwurzel an.

4. Mit diesem Quotienten multiplicire man den ersten Theil doppelt genommen, und schreibe das Product so, daß die niedrigste Zifer desselben unter der heruntergeruckten 1ten Zifer der zweyten Classe zu stehen komme.

5. Suche man das Quadrat des gedachten Quotienten und schreibe dasselbe unter das vorher-

 gehen-

gehende Product, aber um eine Stelle weiter nach der Rechten.

6. Addire man das vorhin gefundene doppelte Product und dieses Quadrat, und ziehe die Summe von dem Reste der ersten Classe und der ganzen zweyten Classe, nachdem man zuvor deren zweyte Ziffer neben die erste heruntergeruckte gesetzt hat, ab. Im Fall diese Summe grösser ist, als die Zahl, wovon sie abgezogen werden soll, so ist der zweyte Theil der Wurzel zu groß angenommen, und man muß ihn also kleiner nehmen, und der bisherigen Arbeit sich von neuem unterziehen.

7. Wenn hier ein Rest bleibt; so setzt man zu demselben die erste Ziffer der folgenden Classe, betrachtet beyde gefundene Theile der Wurzel als den ersten Theil, und verfährt darauf wieder nach den Regeln Nr. 3. 4. 5.

8. Hat die Wurzel mehr als 3 Theile, so fährt man, indem man nur die gefundenen Theile der Wurzel zusammen als den ersten betrachtet, auf eine ähnliche Art fort. Zur Erläuterung dieser Regeln diene noch folgendes Exempel, in welchem 4757136784 die gegebene Quadratzahl ist

```
47|57|13|67|84|68972
36
----
1157
(12)
96
 64
----
1024
----
13313
(136)
1224
  81
----
12321
----
 99267
(1378)
 9646
   49
----
 96509
----
 275684
(13794)
 27568
     4
----
 275684
----
      0
```

S. Nun getraue ich mich ebenfalls, aus einer gegebenen Zahl eine vieltheilige Wurzel zu finden. Allein wie macht man es dann, wenn am Ende noch etwas übrig bleibt?

L. Ehe ich Ihnen auf diese Frage antworte, will ich ein Paar andere Umstände berühren. Man kann vermittelst des Zusammenziehens des doppelten Products des neuen Theils in die vorhergehenden mit dem Quadrate dieses neuen Theils, so als wir dieselbe schon in der Lehre von der Erhebung der Zahlen zu Quadratzahlen kennen gelernt haben, die Extraction der Quadratwurzel um ein beträchtliches verkürzen. Man setzt dabey, nachdem man einen neuen Theil gefunden, und sich denselben als einen Theil der Wurzel angemerkt hat, ihn auch neben den Divisor, und multiplicirt beyde mit ihm. Das vorhergehende Exempel würde mit diesem Vortheile auf folgende Art gerechnet werden.

```
47|57|13|67|84|68972
36
-----
1157
 (128)
1024
------
 13313
 (1369)
 12321
 ------
   99267
  (13787)
   96509
   ------
   275884
  (137942)
   275884
   ------
       0
```

Ver-

Vergleichen Sie nun das vorhergehende Exempel mit dem S. 384 und das jetzige mit dem S. 385, so werden Sie leicht sehen, daß man bey der Extraction der Quadratwurzel von der gegebenen Zahl nach und nach die Zahlen wegnimmt, durch deren Addition die Quadratzahl entstanden war. Das zweyte, worauf ich Sie noch führen wollte, betrifft den Fall, wenn in der zu findenden Wurzel Nullen vorkommen. Sobald dies ist, ist weiter keine Multiplication nöthig, denn man würde lauter Nullen erhalten, und folglich auch keine Subtraction, und man geht also alsdann sogleich zur folgenden Classe fort. Soll z. B. aus 529322049 die Quadratwurzel gefunden werden, so ist die Rechnung

```
5|29|32|20|49|23007
4
―――
129
(43)
―――
129
―――
   32
 (46)
―――――
   3220
  (460)
――――――
   322049
  (46007)
―――――――
   322049
―――――――
        0
```

Nun wollen wir den Fall betrachten, wenn nach der Findung der Quadratwurzel in ganzen Zahlen noch etwas übrig ist. Will man, wenn dies geschieht, die Quadratwurzel weiter suchen, so muß solches in Brüchen geschehen, und am vortheilhaftesten sucht man sie dann ferner in zehntheiligen Brüchen. Es ist z. B. vollkommen gleich, ob man die Quadratwurzel aus 9662, oder ob man sie aus 9662,000000 sucht, denn beyde Zahlen bedeuten gleich viel. Die Verfahrungsart ist auch von der beschriebenen nicht weiter unterschieden, als daß man in der Wurzel die Stelle der Einer zu bemerken nicht vergessen darf. Das übrige will ich Ihnen nach folgenden Exempel sagen.

96|62|98,2954729
81

1562
(188)
1504

5800
(1962)
3924

187600
(19649)
176841

1075900
(196585)
981925

9297500
(1965904)
7863616

143388400
(19659087)
137613609

577479100
(196590941)
393181884

18429721600
(1965909449
17693185041

736536559 u. s. w.

Das hier nöthige Verfahren unterscheidet sich also von dem sonstigen in weiter nichts, als daß man, wenn man bis zu den Einern gekommen ist, und also keine Classen mehr übrig sind, statt der sonst zu dem gebliebenen Reste hinzuzusetzenden Zahlen, Nullen anhängt, und zwar so lange, bis man die Wurzel in so kleinen Theilen gefunden hat, als man es für nöthig findet.

S. Wie verfährt man nun aber, wenn man aus lauter zehntheiligen Brüchen die Quadratwurzel ziehen soll?

L. Nicht anders als bisher, nur daß man die Eintheilung in Classen, indem man von den Einern anfängt, nicht nach der Linken, sondern nach der Rechten zu vornimmt, und den Werth des höchsten Theils der Wurzel gehörig bestimmt. Versuchen Sie hiernach aus 0,000013307904 die Quadratwurzel zu ziehen.

S. (Rechnet.)

0,00|00|13|30|79|04|0,003648

9

430

(66)

396

3479

(724)

2896

58304

(7288)

58304

0.

L. Warum haben Sie den 1ten Theil der Wurzel in die 3te niedere Ordnung gesetzt?

S. Weil die 13, worin das Quadrat steckt, zur 6ten niedern Ordnung gehört, und die Ordnung der Wurzel immer halb so groß als die Ordnung des Quadrats ist.

L. Nun wird das, was noch übeig ist, Ihnen weiter keine Schwierigkeit machen. Wie findet man wohl die Quadratwurzel eines Bruchs?

S. Indem man aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel zieht.

L. Also ist die Quadratwurzel von $\frac{9}{16}$?

S. $\frac{3}{4}$.

L. Und von $\frac{25}{64}$.

S.

S. $\frac{1}{8}$.

L. Welches ist ferner die Quadratwurzel aus a^4?

S. a^2.

L. Wie so?

S. Wenn man eine Dignität zum Quadrat erhebt, so erhält man eine gleichartige Dignität mit einem doppelt so grossen Logarithmen; folglich muß umgekehrt die Quadratwurzel aus einer Dignität eine gleichartige Dignität mit einem halb so grossen Logarithmen seyn.

L. Sollte uns dieser Umstand nicht die Extraction der Quadratwurzeln erleichtern können, wenn wir Tabellen, wie S. 257 zur Hand hätten?

S. O ja; denn alsdann sähe man nach, was für eine Dignität die Zahl wäre, woraus man die Quadratwurzel suchen sollte, dividirte ihren Logarithmen mit 2, und die Zahl, die bey dem Quotienten stünde, wäre die gesuchte Quadratwurzel.

L. Welches ist also die Quadratwurzel aus 262144?

S. (Hat die gedachten Tabellen zur Hand.) 512.

L. Wie so?

S. 262144 ist die 18te Dignität von 2, und die Quadratwurzel daraus ist die 9te Dignität von 2, oder 512.

L. Welches ist für die Quadratwurzel von 43046721?

S. 6561, oder die 8te Dignität von 3, weil 43046721 die 16te Dignität von 3 ist.

L. Wie uns also dergleichen Tabellen bey der Extraction der Quadratwurzel zu statten kommen würden, wenn wir sie vollständig hätten. Doch jetzt zu den Buchstaben. Ziehen Sie die Quadratwurzel aus $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

S. Wie soll ich das machen?

L. Nach denselben Regeln als bisher, nur daß Sie hier nicht nöthig haben, das gegebene erst in Classen zu theilen. Nehmen Sie einen Theil, wovon Sie bequem die Wurzel angeben können, ziehen Sie sein Quadrat von dem gegebenen ab, und verfahren alsdann, wie Sie bisher verfuhren.

S. (Rechnet.)

$$\begin{array}{l|l}
a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & a^2+2ab+b^2 \\
a^4 & \\
\hline
\quad 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & \\
\quad (2a^2) & \\
\quad 4a^3b+4a^2b^2 & \\
\hline
\qquad 2a^2b^2+4ab^3+b^4 & \\
\qquad (2a^2 \quad +4ab) & \\
\qquad 2a^2b^2+4ab^3+b^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

L. Sie haben hier jedesmal den Divisor erst mit dem neuen Theile multiplicirt, und dann das Quadrat des neuen Theils hinzugesetzt. Sie hätten es hier auch so machen können, als bey den

Zahlen, daß Sie zu dem Divisor den neuen Theil gesetzt, und beydes mit dem neuen Theile multiplicirt hätten. Indeß bey Buchstaben ist dies kein Vortheil, so wie es solches bey den Zahlen war, und daher kann solches auch hier unterbleiben. Welches ist denn nun endlich die Quadratwurzel aus + 4?

S. + 2.

L. Nicht auch — 2?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja; denn das Quadrat einer negativen Zahl ist ebenfalls positiv.

L. Also ist die Wurzel von + 4?

S. + 2 oder — 2.

L. Ein jedes positive Quadrat hat also eine doppelte Wurzel, die beyde gleich groß sind, davon aber die eine positiv und die andere negativ ist. Welches ist denn aber die Quadratwurzel aus — 4?

S. Das weiß ich nicht. Denn — 2 kann es nicht seyn, weil — 2 die Quadratwurzel von + 4 ist, und noch weniger kann es + 2 seyn.

L. Da es nun keinen dritten Fall giebt, so ist es also unmöglich, die Quadratwurzel aus — 4 und überhaupt aus jeder negativen Zahl anzugeben. Hier stoßen wir auf die sogenannten unmöglichen Zahlen, wohin also alle Quadratwurzeln aus negativen Grössen gehören. Dies ist Ihnen ohnstreitig eine ganz neue Art von Zahlen, und viel-

leicht scheinen Sie Ihnen ihres Namens wegen gar keiner Betrachtung werth. Gleichwohl werden Sie wohl thun, Sich dieselben zu merken, in der Folge werden Sie noch mehrere Arten derselben kennen lernen. Doch nun erst die Extraction der Cubicwurzel.

Drey und zwanzigstes Gespräch.

L. Nun müssen wir die Ausziehung der Cubikwurzel einer gegebenen Zahl auf eben die Art uns bekannt zu machen suchen, ale wir bisher die Extraction der Quadratwurzel kennen gelernt haben. Was verstehen Sie also unter dem Ausdrucke: aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel finden?

S. Eine Zahl finden, die zum Cubus erhoben, der gegebenen Zahl gleich ist.

L. Im allgemeinen ist diese Erklärung gut, und für die Zahlen, deren Cubikwurzeln eintheilig sind und zur Ordnung o gehören, ebenfalls; alleiu es giebt noch andere Fälle, für welche sie nach deu bey der Erhebung gegebener Zahlen zu Cubikzahlen erklärten Sätzen abgeändert werden muß. Was heißt also ferner: aus einer gegebenen Zahl eine ein-

eintheilige Wurzel von einer höhern oder niedern Ordnung finden?

S. Eine Zahl finden, deren Cubus in einer dreymal so grossen Ordnung der gegebenen Zahl gleich ist.

L. Und was heißt: aus einer gegebenen Zahl eine zweytheilige Cubikwurzel finden?

S. Eine zweytheilige Zahl finden, davon der Cubus des ersten Theils nebst dem dreyfachen Producte des Quadrats des 1ten Theils in den 2ten, ferner dem dreyfachen Producte des ersten Theils in das Quadrat des 2ten, und dem Cubus des 2ten Theils der gegebenen Zahl gleich ist.

L. Was heißt endlich: aus einer gegebenen Zahl einer vieltheilige Wurzel finden?

S. Eine Zahl finden, davon die Cubikzahlen eines jeden Theils nebst den 3fachen Producten eines jeden Theils in das Quadrat aller vorhergehenden und den 3fachen Producten des Quadrats eines jeden Theils in alle horhergehende der gegebenen Zahl gleich sind.

L. Nun betrachten Sie noch einmal folgendes Exempel. Um den Cubus von 46532 zu finden, kann man suchen

4^3	=	64
$3\times4^2\times6$	=	288
$3\times4\ \times6^2$	=	432
6^3	=	216
$3\times46^2\times5$	=	31740
$3\times46\ \times5^2$	=	3450
5^3	=	125
$3\times465^2\times3$	=	1946025
$3\times465\times3^2$	=	12555
3^3	=	27
$3\times4653^2\times2$	=	129902454
$3\times4653\ \times2^2$	=	55836
2^3	=	8
und nun addiren		100752343880768

Wenn die Theile in der Wurzel zu unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen gehören, so ist die Ordnung des Cubus eines jeden höhern Theils um 3 Ordnungen höher als der Cubus des zunächst auf ihn folgenden niedrigern Theils. Der Cubus der Zehner fängt also bey der 4ten Zifer, der Cubus der Hunderte bey der 7ten Zifer, der Cubus der Tausende bey der 10ten Zifer an u. s. w., wenn man von der Rechten nach der Linken zu gehet. Theilt man also eine gegebene Cubikzahl von den Einern an in Classen, so daß in jeder Classe bis auf die letzte, welche auch weniger enthalten kann, drey Zifern zu stehen kommen, und zählt dann diese Classen von der Linken zur Rechten; so hört mit

einer jeden Ciasse der Cubus eines Theils der Wurzel auf, und es besteht die Cubikwurzel der gegebenen Zahl aus soviel Theilen, als man Classen erhalten hat. Die Zahl 100752343880768 auf folgende Art in Classen getheilt

100|752|343|880|768|

enthält 5 Classen und ihre Cubikwurzel besteht daher aus 5 Zifern. Ferner enthält die erste Classe den Cubus des höchsten Theils der Wurzel und außerdem auch etwas von dem 3fachen Producte des Quadrats dieses Theils in den folgenden; die erste Classe mit der 1ten Zifer der 2ten Classe den Cubus des höchsten Theils nebst dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des höchsten Theils in den folgenden; die erste Classe mit den 2 ersten Zifern der folgenden Classe den Cubus des höchsten Theils der Wurzel das 3fache Product des Quadrats des ersten Theils in den 2ten, und das 3fache Product des ersten Theils in das Quadrat des 2ten, und wenn die 3te Zifer der 2ten Classe noch hinzugenommen wird, auch den Cubus des 2ten Theils. Die Richtigkeit dieser Behauptungen erkennet man leicht, wenn man die Zahlen betrachtet, durch deren Addition die Zahl 100752343880768 entstanden ist; und die Wichtigkeit derselben wird sich ebenfalls bald zeigen. Zuvor ein Paar andere Fragen: Aus wie viel Zifern muß eine Zahl bestehen, wenn ihre Cubikwurzel eintheilig seyn soll?

S. Aus nicht mehr als 3 Zifern.

L. Warum?

S. Eine Zahl, die aus mehr als 3 Zifern besteht ist grösser als 1000, der Cubus von 10, und ihre Cubikwurzel kann daher nicht eintheilig seyn.

L. Und zu was für einer Ordnung muß sie gehören, wenn die Wurzel Einer enthalten soll?

S. Zur Ordnung o.

L. Dies vorausgesetzt, so werden Sie, wenn Sie Sich die Cubikzahlen von den eintheiligen Zifern der Ordnung o gemerkt haben, von jeder nicht mehr als dreytheiligen Zahl auch leicht die Cubicwurzel entweder genau oder doch so angeben können, daß Sie sagen, zwischen was für ganze Zahlen sie fallen müsse. Welches ist also die Cubikwurzel von 125?

S. 5.

L. Warum?

S. Weil die 3te Dignität von 5 gleich 125 ist.

L. Und die Cubikwurzel von 729.

S. Ist 9, weil 9 zur 3ten Dignität erhoben 729 giebt.

L. Welches ist nun aber die Cubikwurzel von 72?

S. Diese läßt sich nicht genau angeben, sondern von ihr nur sagen, daß sie zwischen 4 und 5 falle.

L. Und die Cubikwurzel von 100?

S. Diese fällt auch zwischen 4 und 5.

L. Wie so?

S. Die Cubikwurzel von 100 muß grösser als 4 seyn, denn 4 zur 3ten Dignität erhoben ist 64, und kleiner als 5, denn die 3te Dignität von 5 ist 125, und also fällt die Cubikwurzel von 100 zwischen 4 und 5.

L. In der ersten Classe der vorhin abgetheilten Zahl soll nun nach der angeführten Behauptung der Cubus des höchsten Theils stecken. Welches wird also derselbe sowohl als die Wurzel davon seyn?

S. Die Cubikzahl die darin steckt ist 64, und die Wurzel davon 4.

L. Diese 4 wäre also der höchste Theil der Wurzel der Zahl 100752343880768. Gesetzt nun, daß wir den Cubus davon nemlich 64 von 100 abzögen, und zu dem Reste 36 die erste Zifer der folgenden Classe setzten, was würde dann in 368 stecken?

S. Das 3fache Product des Quadrats des ersten Theils in den 2ten.

L. Da wir nun den 1ten Theil bereits kennen, so sind wir ja also wohl auch im Stande daraus den 2ten Theil zu finden?

S. O ja; wir müssen den ersten Theil zum Quadrat erheben, dies Quadrat mit 3 multipliciren, und mit dem Producte in die gedachten 368 dividiren.

L. Sie hätten hier also zu dividiren, womit?

S.

S. Mit 48.

L. Und der Quotient würde seyn?

S. 7.

L. 48 steckt allerdings in 368 siebenmal; allein wenn der Quotient 7 der 2te Theil der Cubicwurzel aus 100752343880768 seyn soll, ist es alsdann genug, daß das 3fache Product aus ihn und dem Quadrate des ersten Theils in dem Reste der ersten Classe und der 1ten Zifer der 2ten Classe stecke?

S. Nein, sondernes muß in dem Reste der ersten Classe und der ganzen 2ten Classe das 3fache Product aus dem Quadrate des 1ten Theils in den 2ten, das 3fache Product des Quadrats des 2ten Theils in den ersten und der Cubus des 2ten Theils stecken.

L. Aus dieser Ursach ist 7 zu groß zum 2ten Theile der gesuchten Wurzel. Denn es ist

$$3 \times 4^2 \times 7 = 336$$
$$3 \times 4 \times 7^2 = 588$$
$$7^3 = 343$$

und die Summe hievon 39823

ist grösser als 36752. Der 2te Theil der gesuchten Wurzel ist also 6. Gesetzt nun, daß wir

$$3 \times 4^2 \times 6 = 288$$
$$3 \times 4 \times 6^2 = 432$$
$$6^3 = 216$$

oder 33336

von dem Reste der 1ten Classe und der ganzen 2ten

 Classe

Classe abziehen, so bleibt 3416, und was steckt in diesem Reste, wenn wir dazu die 1te Zifer der folgenden Classe setzen?

S. Das 3fache Product aus dem Quadrate der beyden ersten Theile in den dritten.

L. Da wir nun die beyden ersten Theile schon gefunden haben, so können wir ja hieraus auch wohl den dritten finden?

S. Ja, und zwar auf eine ähnliche Art, als wir vorhin den 2ten Theil gefunden haben. Wir erheben beyde gefundene Theile der Wurzel zum Quadrate, machen davon das 3fache, und dividiren hiermit.

L. Dies vorausgesetzt, werden die Regeln für die Extraction der Cubikwurzel Ihnen nicht schwer zu begreifen werden. Eintheilige Wurzeln entweder genau oder so anzugeben, daß die Zahlen bestimmt werden, zwischen welche sie fällt, haben Sie schon vorhin gelernt. Gehören die Wurzeln zur Ordnung 0, so hat man dazu kein Erleichterungsmittel; gehören sie aber zu einer von den höhern oder niedern Ordnungen, welches man daran erkennt, wenn die gegebene Zahl Zifern faßt, welche zu einer größern, als zur 2ten Ordnung gehören; so nimmt man die Zahl so, daß die Zahl ihrer Ordnung sich durch 3 dividiren läßt, sucht

sucht dann die Cubikwurzel, so wie man eine eintheilige Wurzel von der Ordnung 0 sucht, und setzt sie darauf in eine dreymal kleinere Ordnung. So ist die Cubikwurzel von 27000000 = 300 und von 0,008 = 0,2. Besteht aber die Wurzel aus mehrern Theilen, so hat man zu ihrer Findung folgende Regeln zu beobachten.

1. Man theilet die gegebene Zahl von den Einern an in Classen, so daß man jede Classe bis auf die letzte zur Linken, welche auch weniger enthalten kann, aus 3 Zifern bestehen läßt.

2. Sucht man einen Cubus, welcher der ersten Classe zur Linken entweder gleich, oder zunächst kleiner ist, zieht denselben von der ersten Classe ab, und merkt die Wurzel davon als den 1ten Theil der gesuchten Wurzel an.

3. Setzt man zu dem gebliebenen Reste die 1te Zifer der folgenden Classe.

4. Erhebt man den gefundenen Theil der Wurzel zum Quadrate und macht davon das dreyfache, und setzt solches unter die vorhin gedachte Zahl.

5. Dividirt man die obere Zahl durch die darunter stehende und merkt den Quotienten als den 2ten Theil der Wurzel an.

6. Multipliciret man mit diesem 2ten Theile den gebrauchten Divisor, und setzt das Product gerade unter denselben.

7. Macht man das Quadrat des 2ten Theils, multiplicirt solches mit dem ersten Theile, und ausserdem noch mit 3, und setzt dies Product eine Stelle weiter nach der Rechten unter das vorhergehende.

8. Sucht man den Cubus des 2ten Theils, und setzt solchen ebenfalls eine Stelle weiter nach der Rechten hinausgeruckt unter das vorhergehende.

9. Addirt man die nach Nr. 6, 7, 8 gefundenen Zahlen und ziehet die Summe von dem Reste der ersten Classe und der ganzen 2ten Classe, deren beyde letzte Zifern man zuvor neben die 1te heruntergeruckte gesetzt hat, ab.

10. Ist der Subtrahendus in diesem Falle grösser als der Minuendus, so ist der Quotient oder 2te Theil der Wurzel zu groß genommen, und man muß ihn also kleiner annehmen, und das bisherige noch einmal verrichten.

11. Zu dem Reste setzt man nun wieder die erste Zifer der folgenden Classe, betrachtet beyde gefundene Theile der Wurzel als den 1ten und verfährt, um einen folgenden Theil zu finden, auf eben die Art als bisher gezeigt worden.

12. Hat man nach 10 keine Classe mehr, so ist die Wurzel zweytheilig; sind nach 11 noch Classen vorhanden, so betrachtet man immer die schon gefundenen Theile der Wurzel zusammen genommen als den ersten Theil, und verfährt nach 4 bis 10, bis keine Classe mehr übrig ist.

13. Die auf diese Art gefundene Zahl muß die gesuchte Cubikwurzel seyn, denn die Cubikzahlen aller ihrer Theile nebst den 3fachen Producten eines jeden Theils in das Quadrat aller vorhergehenden und den 3fachen Producten des Quadrats eines jeden Theils in alle vorhergehende sind der gegebenen Zahl entweder genau, oder doch dem Theile nach, aus welchem man die Wurzel gezogen hat, gleich. Um also die Cubikwurzel aus 185193 zu finden, müßte man rechnen,

	185|193|57
5^3	125
	60193
(3×5^2)	(75)
$3 \times 5^2 \times 7$	525
$3 \times 5 \times 7^2$	735
7^3	343
	60193
	0

so wie um die Wurzel von 100752343880768, auf folgende Art

```
100|752|343|880|768|46532
 64
-----
 36752
 (48)
 288
  432
   216
-----
 33336
-----
  3416343
  (6348)
  31740
    3450
     125
-----
  3208625
-----
   207718880
   (648675)
   1946025
      12555
         27
-----
   194728077
-----
    12990803768
    (64901227)
    129902454
        55836
            8
-----
    12990803768
-----
          0
```

Wenn

Wenn eine Zahl keine genaue Cubikzahl ist, so findet man die Wurzel derselben durch die Näherung in zehntheiligen Brüchen nach denselben Regeln, nur muß man jedesmal drey Nullen anhängen, so wie man bey der Extraction der Quadratwurzel nur 2 anhieng. Es sey z. B. die Cubikwurzel aus 5 zu finden. Hier rechnet man

```
5|1,7099
1
————
4,000
(3)
21
147
343
————
3913
————
87000
(867)
————
87000000
(86700)
780300
41310
729
————
78443829
————
8556171000
(8762443)
78858387
415287
729
————
7889992299
————
666178701   u. s. w.
```

Wenn

Wenn man die Extraction der Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl mit der Erhebung einer Zahl zum Cubus vergleicht, so fällt in die Augen, daß man bey der Extraction der Cubikwurzel nach und nach alles das von der gegebenen Zahl wegnehme, was man bey der Erhebung zum Cubus addirt hat, und diese Bemerkung kann die Regeln der Extraction der Cubikwurzel noch mehr erleichtern. Wie würden Sie aber nun die Cubikwurzel eines Bruchs suchen?

S. So, daß ich sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner die Cubikwurzel zöge, und aus den gefundenen Wurzeln einen neuen Bruch machte.

L. Also wäre die Cubikwurzel aus $\frac{8}{125}$?

S. $\frac{2}{5}$.

L. Und die Cubikwurzel aus $\frac{27}{64}$?

S. $\frac{3}{4}$.

L. Versuchen Sie nun auch aus $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ die Cubikwurzel zu ziehen.

S. Hier habe ich, so wie bey der Extraction der Quadratwurzel in Buchstaben, nicht nöthig, das gegebene in Classen zu theilen, sondern ich suche aus irgend einem Theile der gegebenen Grösse die Cubikwurzel, ziehe ihren Cubus von dem gegebenen ab, und verfahre darauf nach denselben Regeln, nach welchen man bey Zahlen die Cubikwurzel findet.

L. Diese Bemerkung ist ganz richtig; befolgen Sie nur dieselbe wirklich.

S. (Rechnet.)

$$
\begin{array}{l}
a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6 \mid a^2+2ab+b^2 \\
a^6 \\
\hline
6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6 \\
(3a^4) \\
6a^5b+12a^4b^2+\ 8a^3b^3 \\
\hline
3a^4b^2+12a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6 \\
(3a^4 \quad +12a^3b \quad +12a^2b^2) \\
3a^4b^2+12a^3b^3+12a^2b^4 \\
\qquad\qquad +\ 3a^2b^4+6ab^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +b^6 \\
\hline
3a^4b^2+12a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6 \\
\hline
0.
\end{array}
$$

L.

L. Aus was für einem Grunde haben Sie zur Cubikwurzel von a^6 die Grösse a^2 angenommen?

S. Weil a^2 zum Cubus erhoben a^6 giebt.

L. Ueberhaupt ist der Logarithme des Cubus einer Dignität gegen den Logarithmen dieser Dignität, als Wurzel betrachtet, gehalten, wie groß?

S. Dreymal so groß.

L. Und also der Logarithme der Cubikwurzel aus einer Dignität?

S. Der dritte Theil des Logarithmen der gegebenen Dignität.

L. Also die 3te Dignität von 2^6?

S. Ist 2^{18}.

L. Und die Cubikwurzel aus 2^{15}?

S. Ist 2^5.

L. Aus diesem Grunde könnten uns vollständige Tabellen, wie S. 257, auch bey der Erhebung gegebener Zahlen zu Cubikzahlen und bey der Extraction der Cubikwurzeln sehr gute Dienste leisten. Denn was hätte man bey der Erhebung einer Zahl zur Cubikzahl, wenn man solche Tabellen vollständig hätte, zu thun?

S. Man nähme ihren Logarithmen, multiplicirte ihn mit 3, und die Zahl, die bey diesen neuen Logarithmen stünde, wäre die verlangte Cubikzahl.

L. Und wenn man die Cubikwurzel finden wollte?

S.

S. Alsdann dividirte man den Logarithmen der gegebenen Zahl mit 3, und die Zahl, die neben diesen neuen Logarithmen stünde, wäre die verlangte Cubikwurzel.

L. Also wäre der Cubus von 64?

S. 262144, denn 64 ist 2^6, und 262144 ist 2^{18}.

L. Und die Cubikwurzel aus 32768?

S. 32, denn 32768 ist 2^{15} und 32 ist 2^5.

L. Ferner der Cubus von 243?

S. Ist 14348907, denn 243 ist 3^5 und 14348907 ist 3^{15}.

L. Und die Cubikwurzel aus 387420489?

S. Ist 729, denn 387420489 ist 3^{18} und 729 ist 3^6.

L. Wie wird denn nun wohl die Cubikwurzel aus einer positiven Zahl beschaffen seyn?

S. Ebenfalls positiv, denn der Cubus einer negativen Wurzel ist nicht positiv, sondern negativ.

L. Und die Cubikwurzel aus einer negativen Zahl ist also?

S. Auch negativ, denn eine positive Wurzel giebt eine positive Cubikzahl.

L. Also ist die Cubikwurzel aus $+8$?

S $+2$.

L. Aber aus -8?

S. -2.

L. Es verhält sich also hier anders als bey den Quadratwurzeln, und bis jetzt kommen wir

bey

bey der Extraction der Cubikwurzeln auf keine unmöglichen Zahlen. — Auf eben die Art nun, als wir uns bisher mit der Erhebung der Zahlen zu Quadrat und Cubikzahlen beschäftiget haben, könnten wir auch die Erhebung der Zahlen zur vierten, fünften, sechsten Dignität u. s. w. betrachten, und auf die Eigenschaften dieser Dignitäten eben so Regeln für die Ausziehung der vierten, fünften, sechsten Wurzel u. s. w. folgen lassen, als wir solches bey den Quadrat- und Cubikzahlen gethan haben. Es ist aber das bisherige zum Anfange hinlänglich, und eine genaue Betrachtung der gleichartigen Dignitäten überhaupt und insbesondere ihrer Logarithmen wird uns in den Stand setzen, einen viel bequemern Weg kennen zu lernen. Hiebey wird sich auch Gelegenheit finden, selbst von dem Quadrat und Cubikzahlen und von den Quadrat- und Cubikwurzeln noch verschiedenes zu berühren, und um soviel mehr soll dies daher der Gegenstand unserer nächsten Unterredung seyn. Ueben Sie Sich indeß fleißig in dem Erheben der Zahlen zu Qugdrat- und Cubikzahlen und in der Extraction der Quadrat- und Cubikwurzel, denn es ist sehr oft nöthig, sowohl diese Dignitäten als Wurzeln aus gegebenen Zahlen zu suchen.

Vier=

Vier und zwanzigstes Gespräch.

L. Wenn eine Zahl auf die Art aus einer andern entstanden ist, daß man diese andere zu irgend einer Dignität erhoben, oder daraus irgend eine Wurzel gezogen hat; so kann man jene nach dieser Entstehungsart beschreiben. Da z. B. 64 aus 4 entsteht, wenn man 4 zur dritten Dignität erhebt, und 4 aus 64, wenn man daraus die dritte Wurzel zieht, so kann man anstatt 64 die dritte Dignität von 4, und anstatt 4 die dritte Wurzel aus 64 sagen. Allein wie viel Stücke müssen in dergleichen Beschreibungen angegeben seyn, wenn dadurch ein hinlänglicher Begriff von einer Zahl soll hervorgebracht werden können.

S. Zwey; einmal die Zahl, wovon eine andere eine Dignität oder Wurzel ist, und zweytens, die wievielste Dignität oder Wurzel sie davon ist.

L. Die wievielste Dignität oder Wurzel eine Zahl von einer andern sey, kann man durch ihren Logarithmen anzeigen, und also anstatt 64 ist die dritte Dignität von 4 auch sagen, der Logarithme von 64 für die Wurzel 4 sey 3, so wie anstatt 4 sey die dritte Wurzel aus 64, der Logarithme von 4 für die Zahl 64 sey $\frac{1}{3}$. Kurz zeigt man

dies auf folgende Art an: Für die Wurzel 4 ist $l\,64 = 3$, für die Zahl 64 ist $l\,4 = \frac{1}{3}$; und wenn vorausgesetzt werden kann, was für eine Wurzel oder Zahl bey der Erhebung zur Dignität oder der Extraction der Wurzel zum Grunde liege, noch kürzer auf diese Art $l\,64 = 3$, $l\,4 = \frac{1}{3}$.

S. Also ist es wohl gleich viel, ob man schreibt

$$64 = 4^3 \text{ oder}$$
$$l\,64 = 3 \text{ für die Wurzel } 4?$$

L. Natürlicher Weise, so wie es aus einerley ist, ob man schreibt

$$4 = \sqrt[3]{64} \text{ oder}$$
$$l\,4 = \tfrac{1}{3} \text{ für die Zahl } 64.$$

Welche Art gefällt Ihnen denn wohl am besten?

S. Die erste, oder $64 = 4^3$ und $4 = \sqrt[3]{64}$, denn hier ist alles angezeigt, was angezeigt zu werden braucht, und man hat dazu keine Worte nöthig.

L. Aber, wenn die Zahl, wovon eine andere eine Dignität oder Wurzel ist, als bekannt vorausgesetzt werden könnte, und man bloß den Logarithmen anzugeben hätte; so fiele ihr Grund weg. Denn wenn ein für allemal 16 dazu angenommen würde; so könnte man mit gleicher Deutlichkeit sagen

$$l\,256 = 2$$
$$l\,4096 = 3, \text{ desgleichen}$$

$$l\,4 = \tfrac{1}{2}$$
$$l\,2 = \tfrac{1}{4},\text{ als}$$
$$256 = 16^2$$
$$4096 = 16^4$$
$$4 = \sqrt{16}\text{ und}$$
$$2 = \sqrt[4]{16}.$$ Nicht wahr?

S. Alsdann freylich.

L. Und da dieser Fall oft statt findet, so ist jene Bezeichnung nicht minder wichtig als diese. Wir wollen daher uns etwas dabey verweilen. Durch den Logarithmen einer Zahl wird also angegeben, wie diese Zahl entweder durch die Erhebung zu einer Dignität oder durch die Extraction der Wurzel aus einer andern Zahl entstanden ist. Ist eine Zahl durch die Erhebung einer andern zu einer Dignität entstanden, so ist ihr Logarithme ein Multiplicator oder eine ganze Zahl; ist sie aber durch die Extraction der Wurzel aus einer andern entstanden, so ist ihr Logarithme ein Divisor, oder ein Bruch, der zum Zähler 1 hat. Die vorhergehenden Exempel geben Beyspiele hievon an die Hand. Nun kann aber die Zahl, welche zu einer Dignität hat erhoben, oder woraus die Wurzel hat gezogen werden müssen, eine ganze Zahl oder ein Bruch mit 1 zum Zähler seyn. In jenem Fall bezeichnet man solches durch positive, in diesem durch negative Logarithmen. Also ist, wenn 16 zum Grunde gelegt wird,

$$l\,256 = 2 = +\,2$$
$$l\,4096 = 3 = +\,3$$
$$l\,4 = \tfrac{1}{2} = = +\,\tfrac{1}{2}$$
$$l\,2 = \tfrac{1}{4} = +\,\tfrac{1}{4},$$ hingegen
$$l\,\tfrac{1}{256} = -\,2$$
$$l\,\tfrac{1}{4096} = -\,3$$
$$l\,\tfrac{1}{4} = -\,\tfrac{1}{2}$$
$$l\,\tfrac{1}{2} = -\,\tfrac{1}{4};$$ und so wie
$$256 = 16^{2}$$
$$4096 = 16^{3}$$
$$4 = 16^{\frac{1}{2}}.$$
$$2 = 16^{\frac{1}{4}},$$ so ist auch
$$\tfrac{1}{256} = 16^{-2} = \tfrac{1}{16^{2}}$$
$$\tfrac{1}{4096} = 16^{-3} = \tfrac{1}{16^{3}}$$
$$\tfrac{1}{4} = 16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}}$$
$$\tfrac{1}{2} = 16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}}$$

S. Auf diese Art erhält man vielerley Bezeichnungen der Zahlen, die entweder Dignitäten oder Wurzeln von andern Zahlen sind.

L. Und eine jede dieser Bezeichnungen ist wichtig, weil bald die eine bald die andere gebraucht wird. Es können nun aber auch Zahlen aus andern entstehen, so daß man diese andere erst zu einer Dignität erhebt, und aus dieser Dignität dann eine Wurzel zieht. Wenn man z. B. 2 zur 6ten Dignität erhebt, und daraus die 2te Wurzel zieht, so

so erhält man 8. 8 ist also eine Zahl, welche man erhält, wenn man 2 zur 6ten Dignität erhebt, und daraus die 2te Wurzel zieht. Dies zeigt man auf folgende Art an

$8 = 2^{\frac{6}{3}}$ oder

$l\,8 = \frac{6}{3}$ für die Wurzel 2. Was bedeutet hiernach $9^{\frac{4}{3}}$?

S. 9 zur 4ten Dignität erhoben und aus dieser 4ten Dignität die 3te Wurzel gezogen.

L. Und $8^{\frac{3}{5}}$?

S. 8 zur 3ten Dignität erhoben, und aus dieser 3ten Dignität die 5te Wurzel gezogen.

L. Vielleicht können Sie auch sagen, was folgender Ausdruck bedeute: $l\,8 = \frac{3}{4}$.

S. 8 ist aus einer andern Zahl entstanden, indem man dieselbe zur dritten Dignität erhoben, und daraus die 4te Wurzel gezogen hat.

L. Angenommen nun, daß irgend eine Zahl zur zweyten Dignität erhoben, und daraus die 2te Wurzel gezogen würde; was erhielte man dann?

S. Die Zahl selbst.

L. Und wenn man eine Zahl zur dritten Dignität erhöbe, und daraus die dritte Wurzel zöge?

S. So erhielte man auch die erste Zahl selbst wieder.

L. Und wenn man also überhaupt eine Zahl zu irgend einer Dignität erhebt und daraus die gleichnamige Wurzel zieht?

S. So erhält man jederzeit dieselbe Zahl wieder.

L. Also ist auch wohl $a^3 = a^{\frac{6}{2}} = a^{\frac{9}{3}} = a^{\frac{12}{4}}$ u. s. w.

S. Ja, denn es ist $a^6 = a^3$ zur 2ten Dignität erhoben, und die 2te Wurzel daraus ist also a^3; ferner ist $a^9 = a^3$ zur 3ten Dignität erhoben, und die 3te Wurzel hieraus ist a^3 u. s. w.

L. Ferner ist auch wohl $a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{6}{8}} = a^{\frac{9}{12}}$ u. s. w.?

S. Ja, denn in $a^{\frac{6}{8}}$ und $a^{\frac{9}{12}}$ ist zwar a zu einer höhern Dignität erhoben als in $a^{\frac{3}{4}}$, aber es wird daraus auch eine grössere Wurzel gezogen, und so viel Vergrösserung durch die Erhebung zu einer andern Dignität hervorgebracht wird, so viel wird durch die Extraction der Wurzel auch wieder verkleinert.

L. Was also auch für ein Logarithme gegeben sey, so kann man an seiner Stelle jede andere ihm gleiche Zahl nehmen, und dieselbe in der angeführten Bedeutung verstehen. Nun sey a^3 und $a^{\frac{1}{2}}$ gegeben; sind dies wohl gleichartige Grössen, so daß man sie addiren könnte?

S. Nein, denn die 3te Dignität von a ist von der Quadratwurzel von a sehr verschieden.

L. Aber gleichartige Dignitäten sind es doch?

S. Ja.

L. Und man könnte sie doch also wohl mit einander multipliciren?

S. Weiter nicht, als daß man beyde auf diese Art neben einander setzte $a^3a^{\frac{1}{2}}$.

L. Ist nicht $a^3 = a^{\frac{6}{2}}$?

S. Ja.

L. Und also $a^3a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{6}{2}}a^{\frac{1}{2}}$?

S. Ja.

L. Hier haben Sie also 2 Factoren, aus deren jeden die Quadratwurzel gezogen werden soll. Die Factoren sind a^6 und a^1. Erhält man nicht dasselbe, wenn man beyde Factoren mit einander multiplicirt, und aus dem Producte die Quadratwurzel zieht?

S. Ja, und also ist $a^{\frac{6}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$.

L. Also kann man die Multiplication hier doch weiter verrichten, als Sie anfänglich meinten. Multipliciren Sie nun auch b^2 mit $b^{\frac{3}{4}}$.

S. Da $b^2 = b^{\frac{8}{4}}$, so ist $b^2b^{\frac{3}{4}} = b^{\frac{8}{4}}b^{\frac{3}{4}} = b^{\frac{11}{4}}$.

L. Anstatt $a^{\frac{7}{2}}$ könnte man auch setzen $a^{3\frac{1}{2}}$ und anstatt $b^{\frac{11}{4}}$ könnte man setzen $b^{2\frac{3}{4}}$, wenn man diese Ausdrücke, so wie es immer geschieht, so verstünde, daß

$$a^{3\frac{1}{2}} = a^3a^{\frac{1}{2}} \text{ und } b^{2\frac{3}{4}} = b^2b^{\frac{3}{4}} \text{ sey.}$$

Bey Fällen dieser Art verrichtet man also die Multiplication gleichartiger Dignitäten, eben so als wenn die Logarithmen ganze Zahlen, sind durch die Addition der Logarithmen. Nun versuchen Sie a^3 mit a^{-5} zu multipliciren.

S. Wie macht man das?

L. Setzen Sie $\frac{1}{a^5}$ anstatt a^{-5}, so wird sichs bald zeigen.

S. Es ist also $a^3 \times a^{-5} = a^3 \times \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$.

L. Und was giebt also $a^6 \times a^{-3}$?

S. a^3; denn $a^6 \times a^{-3} = a^6 \times \frac{1}{a^3} = \frac{a^6}{a^3} = a^3$.

L. Wir haben hier also nichts weiter nöthig, als die Logarithmen zu vereinigen, und überhaupt also multiplicirt man gleichartige Dignitäten mit einander, wenn man die Wurzel unverändert läßt, und nur ihre Logarithmen addirt oder vereiniget. Nun dividiren Sie a^6 durch a^2.

S. Der Quotient ist a^4.

L. Aber welches ist der Quotient von a^6 dividirt durch $a^{\frac{3}{4}}$?

S. Um diesen zu finden, verwandele ich a^6 in $a^{\frac{24}{4}}$, und dividire nun $a^{\frac{24}{4}}$ durch $a^{\frac{3}{4}}$. Aber wie nun weiter?

L. Ist nicht $a^{\frac{24}{4}}$ dividirt durch $a^{\frac{3}{4}}$ eben soviel als der Bruch $\frac{a^{\frac{24}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}}$?

S. Ja.

L. Und nicht nicht $\frac{a^{\frac{24}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{a^{24}}{a^{3}}}$?

S. Ja.

L. Und da $\frac{a^{24}}{a^{3}} = a^{21}$ so muß auch $\sqrt[4]{\frac{a^{24}}{a^{3}}} = \sqrt[4]{a^{21}} = a^{\frac{21}{4}}$ seyn; nicht?

S. Ja; und nun weiß ich, wie man zu verfahren hat.

L. Dividiren Sie also b^{3} durch $b^{\frac{2}{5}}$.

S. Da $b^{3} = b^{\frac{15}{5}}$, so ist b^{3} dividirt durch $b^{\frac{2}{5}} = \frac{b^{\frac{15}{5}}}{b^{\frac{2}{5}}} = b^{\frac{13}{5}}$.

L. Also wird in dergleichen Fällen die Division gleichartiger Dignitäten dadurch verrichtet, daß man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus abzieht, eben so, als wenn die Logarithmen der gegebenen Zahlen ganze Zahlen sind. Welches ist nun ferner der Quotient aus $\frac{a^{3}}{a^{-4}}$

S. a^{7}, denn $\frac{a^{3}}{a^{-4}} = a^{3}$ dividirt durch $\frac{1}{a^{4}} = a^{3} \times a^{4} = a^{7}$.

L. Hier bestimmt man also den Unterschied der Logarithmen, um den Quotienten zu finden, und überhaupt ist also der Logarithme eines Quotienten der Unterschied der Logarithmen des Divisors

sors und Dividendus; und eben das findet statt, wenn gleich die Logarithmen Brüche sind. Was man also auch für Logarithmen hat, so ist doch allzeit der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der Factoren, und der Logarithme eines Quotienten der Unterschied der Logarithmen des Divisors und Dividendus. Hieraus fließt denn ganz natürlicher Weise, daß, was für Logarithmen auch statt finden mögen, der Logarithme des Quadrats immer doppelt so groß, und der Logarithme des Cubus immer dreymal so groß sey, als der Logarithme der Wurzel, so wie umgekehrt der Logarithme der Quadratwurzel immer die Hälfte, und der Logarithme der Cubikwurzel immer der 3te Theil des Logarithmen der Zahl ist, aus welchem die Wurzel gesucht werden soll. Welches wird also wohl die 7te Dignität von a^3 seyn?

S. a^{21}.

L. Wie so?

S. Die 7te Dignität ist ein Product aus 7 gleichen Factoren, und 7 gleiche Factoren, davon jeder a^3 ist, geben a^{21}.

L. Wie findet man also auch wohl überhaupt die Dignität einer Dignität, die man als Wurzel betrachtet.

S. Wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Logarithmen der Dignität multiplicirt, wozu man die Wurzel erheben soll.

L.

L. Und umgekehrt wird man also die Wurzel finden?

S. Wenn man den Logarithmen der gegebenen Dignität mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

L. Also ist $(a^7)^6$?

S. a^{42}.

L. Und $\sqrt[9]{a^{72}}$.

S. a^8.

L. Dies zeigt unter andern auch, daß man anstatt $\sqrt[9]{a^{72}}$ auch $a^{\frac{72}{9}} = a^8$ schreiben könne, und daß also das, was vorher von der Bedeutung der gebrochenen Logarithmen gesagt worden, seine völlige Richtigkeit habe. Dies alles nun vorausgesetzt, so wollen wir sehen, ob es nicht möglich sey, Logarithmen von allen Zahlen sich zu gedenken, und also Tabellen, wie S. 257 zu verfertigen, die aber alle Zahlen in ihrer natürlichen Folge enthalten. Angenommen also, daß man den Logarithmen irgend einer Zahl wisse; was für Logarithmen ist man nach den vorhin bewiesenen Sätzen daraus im Stande zu finden?

S. Die Logarithmen des Quadrats, des Cubus und überhaupt den Logarithmen einer jeden Dignität dieser Zahl, indem der Logarithme des Quadrats das Doppelte, der Logarithme des Cubus das Dreyfache, der Logarithme der vierten

Digni-

Dignität das Vierfache u. s. w. des Logarithmen der Wurzel ist.

L. Nicht auch die Logarithmen der Quadrat-Cubik- und überhaupt einer jeden Wurzel dieser Zahl?

S. Ja auch diese; denn der Logarithme der Quadratwurzel ist die Hälfte, der Logarithme der Cubikwurzel ein Drittheil, der Logarithme der vierten Wurzel ein Viertheil u. s. w. von dem Logarithmen der Zahl, woraus die Wurzel gezogen worden.

L. Wenn also $l\,10 = 1$ gegeben wäre, so wüßte man?

S. Daß $l\,10^2 = l\,100 = 2$; $l\,10^3 = l\,1000 = 3$; $l\,10^4 = l\,10000 = 4$; $l\,10^5 = l\,100000 = 5$ wäre u. s. w., desgleichen daß $l\,10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; $l\,10^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$; $l\,10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ u. s. w.

L. Da $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$; so könnte man ja auch wohl sagen, es sey $l\,10^{\frac{1}{2}} = 0{,}5$; $l\,10^{\frac{1}{3}} = 0{,}333333\ldots$ $l\,10^{\frac{1}{4}} = 0{,}25$?

S. Ja.

L. Welches wäre aber nun der Logarithme von $\frac{1}{10}$?

S. -1, so wie $l\,\frac{1}{100} = -2$, $l\,\frac{1}{1000} = -3$ u. s. w.

L. Wenn man also die Logarithmen der Multiplicatorzahlen weiß, so sind auch die Logarithmen

der

der ihnen gleichen Divisorzahlen bekannt, denn die Logarithmen von diesen sind keine andere als die Logarithmen von jenen, nur negativ. Gesetzt nun ferner, daß man die Logarithmen zweyer Zahlen kennt; was kann man dann für Logarithmen finden?

S. Den Logarithmen des Products und den Logarithmen des Quotienten dieser Zahlen.

L. Angenommen also, daß man außer $l\,10$ und den daraus bekannten Logarithmen auch $l\,5$ wüßte; was wären dann für Logarithmen bekannt?

S. $l\,5^2 = l\,25$; $l\,5^3 = l\,125$ u. s. w; ferner $l\,5^{\frac{1}{2}}$, $l\,5^{\frac{1}{3}}$, $l\,5^{\frac{3}{4}}$ u. s. f. desgleichen $l\,\frac{10}{5} = l\,2$, und $l(5 \times 10) = l\,50$.

L. Nicht auch die Logarithmen von 20, 200, 2000 u. s. f., desgleichen die Logarithmen von 500, 5000, 5000, 250, 2500, 25000, 1250, 12500, 125000, u. s. f. so wie auch die Logarithmen von 4, 8, 16, 32 u. s. w.?

S. Ja, denn alle diese Zahlen sind entweder Producte oder Quotienten oder Dignitäten von solchen, deren Logarithmen bekannt waren.

L. Und wenn man den Logarithmen eines Products aus zwey Factoren hätte, und daraus die Quadratwurzel zöge; so wüßte man doch auch von dieser Quadratwurzel den Logarithmen?

S. Ja.

L.

L. Wie würde aber diese Quadratwurzel beschaffen seyn? Könnte sie wohl einem der Factoren des gedachten Products gleich seyn?

S. Nein, sondern sie müßte zwischen beyde fallen.

L. Wie so?

S. Das Product aus zwey ungleichen Factoren ist grösser als das Quadrat des kleinern, und kleiner, als das Quadrat des grössern Factors, 4×6 z. B. $> 4 \times 4$ und $< 6 \times 6$; und also muß die Wurzel aus dem Producte zweyer ungleichen Factoren auch grösser als der kleinere, und kleiner als der grössere Factor seyn.

L. Dies vorausgesetzt, so suchen Sie einmal die Quadratwurzel aus 10, und zwar durch die Näherung.

S. (Zieht aus 10 die Quadratwurzel aus, und sagt, da er 3,1622 gefunden.) Das nimmt ja gar kein Ende.

L. Das kann es auch nicht, denn wie ich Ihnen schon einmal gesagt habe, so findet man keine Quadratwurzel, die man in ganzen Zahlen nicht genau angeben kann, auch in Brüchen genau. Denn ein Bruch, dessen Zähler und Nenner auf die kleinsten Zahlen gebracht sind, giebt mit sich selbst multiplicirt wieder einen Bruch, dessen Zahlen keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, und welcher daher nicht in eine ganze Zahl verwandelt werden kann. Folglich ist das Quadrat

drat eines Bruchs auch allezeit ein Bruch und nie eine ganze Zahl. Da dies ist, so kann die Quadratwurzel einer ganzen Zahl kein Bruch seyn, denn sonst müßte das Quadrat eines Bruchs eine ganze Zahl seyn können, welches unmöglich ist. Eben das kann man von den übrigen Dignitäten und Wurzeln behaupten. Wenn daher eine Wurzel aus einer Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie auch kein Bruch; man kann sie nicht genau angeben, ohnerachtet man durch den Weg der Näherung sie immer genauer und genauer zu finden im Stande ist. Man nennt dergleichen Zahlen irrationale Zahlen, so wie diejenigen, welche man genau auszudrucken im Stande ist, rationale heissen. Die Quadratwurzel aus 10 finden Sie daher, so weit Sie auch fortgehen mögen, nie ganz; indeß da das fehlende immer unbeträchtlicher wird, so kann man, wenn man diese Wurzel, so wie eine jede andere in einer hinlänglichen Anzahl von Zehntheilern gefunden hat, dies gefundene als die wahre Wurzel betrachten. Fährt man in der Extraction noch etwas weiter fort, so findet man $\sqrt{10} = 3,162277$ und dabey wollen wir stehen bleiben. Welches ist demnach, wenn l 10 = 1 ist l 3,162277?

S. $\frac{1}{2}$ oder 0,5.

L. Multipliciren Sie nun 3,162277 mit 10; das Product ist?

S. 31,62277.

L. Und der Logarithme hievon?

S. Ist 1,5.

L. Wenn wir nun aus 31,62277 die Quadratwurzel ziehen, so erhalten wir 5,623413; welches wird hievon der Logarithme seyn?

S. $\frac{1,5}{2}$ oder 0,75.

L. Gesetzt nun, daß wir 5,623413 mit 3,162277 multiplicirten, und hieraus die Quadratwurzel zögen, so bekämen wir 4,216964, und der Logarithme von dieser Zahl wäre ebenfalls bekannt. Welches ist er wohl?

S. $\frac{0,75 + 0,5}{2} = \frac{1,25}{2} = 0,625.$

L. Eben so könnten wir nun 5,623413 mit 3,216964 multipliciren, und die Quadratwurzel dieses Products mit ihrem Logarithmen finden. Die Quadratwurzel wäre 4,869674 und der Logarithme?

S. $\frac{0,75 + 0,625}{2} = \frac{1,375}{2} = 0,6875.$

L. Ferner wäre die Quadratwurzel aus 5,623413 x 4,869674 = 5,232991, und der Logarithme hievon?

S. $\frac{0,75 + 0,6875}{2} = \frac{1,4375}{2} = 0,71875.$

L. Von allen Zahlen, die wir bisher durch die Multiplication und Extraction der Wurzel gefunden haben, sind wir auch im Stande gewesen,

die

die Logarithmen anzugeben, und wenn wir auf eine ähnliche Art fortführen, so würden wir von den gefundenen Zahlen auch jedesmal die Logarithmen wissen. Wir könnten auf diese Art finden

$$\sqrt{(4,869674 \times 5,232991)} = 5,048065 \text{ u.}$$
$$l\ 5,048065 = 0,7031250.$$
$$\sqrt{(4,869674 \times 5,048065)} = 4,958069 \text{ u.}$$
$$l\ 4,958069 = 0,6953125.$$
$$\sqrt{(4,958069 \times 5,048065)} = 5,002865 \text{ u.}$$
$$l\ 5,002865 = 0,6992187.$$
$$\sqrt{(4,958069 \times 5,002865)} = 4,980416 \text{ u.}$$
$$l\ 4,980416 = 0,6972656.$$
$$\sqrt{(4,980416 \times 5,002865)} = 4,991627 \text{ u.}$$
$$l\ 4,991627 = 0,6982421.$$
$$\sqrt{(4,991627 \times 5,002865)} = 4,997242 \text{ u.}$$
$$l\ 4997242 = 0,6987304.$$
$$\sqrt{(4,997242 \times 5,002865)} = 5,000052 \text{ u.}$$
$$l\ 5,000052 = 0,6989745.$$
$$\sqrt{(4997242 \times 5,000052)} = 4,998647 \text{ u.}$$
$$l\ 4,998647 = 0,6988525.$$
$$\sqrt{(4,998647 \times 5,000052)} = 4,999350 \text{ u.}$$
$$l\ 4,999350 = 0,6989135.$$
$$\sqrt{(4,999350 \times 5,000052)} = 4,999701 \text{ u.}$$
$$l\ 4,999701 = 0,6989440.$$
$$\sqrt{(4,999701 \times 5,000052)} = 4,999876, \text{ u.}$$
$$l\ 4,999876 = 0,6989592$$
$$\sqrt{(4,999701 \times 5,000052)} = 4,999964 \text{ u.}$$
$$l\ 4,999963 = 0,6989668.$$

$\sqrt{(4{,}999963 \times 5{,}000052)} = 5{,}000008$ u.
$l\,5{,}000008 = 0{,}6989707$.
$\sqrt{(4{,}999963 \times 5{,}000008)} = 4{,}999984$ u.
$l\,4{,}999984 = 0{,}6989687$.

Wenn wir so rechnen, so multipliciren wir immer zwey Zahlen, davon die eine grösser, die andere aber kleiner ist als 5, mit einander, und ziehen aus diesem Producte die Quadratwurzel. Dadurch nähern wir uns denn der 5, indem wir zu den Factoren immer die Zahlen nehmen, die zunächst grösser oder kleiner als sie sind, immer mehr und mehr, und die Logarithmen der Zahlen, davon die eine grösser, die andere aber kleiner ist als 5, stimmen, je weiter man fortfährt, in desto mehr Zahlen mit einander überein. Die Logarithmen z. B. von

5,002865 = 0,6992187 und
4,980416 = 0,6972656 stimmen in den beyden ersten Zahlen; hingegen die Logarithmen von

5,000052 = 0,6989745 und
4,998647 = 0,6988525 schon in den ersten drey Zahlen; und die Logarithmen von

5,000008 = 0,6989707 und
4,999984 = 0,6989687 in den ersten vier Zahlen mit einander überein. Setzte man nun die Rechnung noch weiter fort, so würden endlich die Logarithmen ähnlicher Zahlen in den ersten 5, 6, 7 u. s. w. Zahlen mit einander übereinstim-

einstimmen, und man könnte diese Uebereinstimmung so weit treiben, als man wollte. So weit nun die Logarithmen zweyer Zahlen, davon die eine grösser und die andere kleiner ist, als 5 mit einander übereinstimmen, so weit gehören sie zu dem Logarithmen von 5 selbst, und Sie sehen also aus dem bisherigen, wie man für 7 und mehrere Decimalstellen den Logarithmen von 5 finden könne. Auf eine ähnliche Art könnte man nun auch den Logarithmen von 3 oder 7 oder 11, und überhaupt einer jeden Zahl suchen, deren Logarithmen man verlangte.

S. Das ist aber eine langwierige Arbeit.

L. Doch nicht in dem Grade, als Sie es Sich vielleicht gedenken. Denn angenommen, daß man den Logarithmen von 5, der 0,6989700 ist, gefunden hat, so hat man, nach den vorhin schon gebrauchten Sätzen, auch

$l\,25 = 1,3979400$

$l\,125 = 2,0969100$; ferner

$l\,\frac{10}{5} = l\,2 = 0,3010300$, und hieraus

$l\,4 = 0,6020600$

$l\,8 = 0,9030900$

$l\,16 = 1,2041200$

$l\,64 = 1,8061800$. Hieraus geben sich ferner die Logarithmen von 250, 2500, 25000 u. s. w. von 2, zu 0, 25. 0, 025. 0,0025

u. s. w. von 1250, 12500, 125000 u. s. w. von 12,5. 1,25. 0,125. u. s. w. von 20, 200, 2000 u. s. w. von 0,2. 0,02. 0,002 u. s. w. Hätte man nun auch den Logarithmen von 3, so hätte man ihn auch von 2x3 = 6, vou 4x3 = 12, von 8x3 = 24 u. s. w. desgleichen von 5x3 = 15; von 5x6 = 30 u. s. f., und überhaupt hat man nur die Logarithmen der einfachen Zahlen nöthig, um die Logarithmen der Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung zu haben, denn die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen kann man aus jenen finden. Nöthig ist es bey der Berechnung der Logarithmen übrigens nicht, daß man dabey 10 zum Grunde legt, und also l 10 = 1 annimmt, sondern man könnte auch statt der 10 jede andere Zahl nehmen. Will man indeß logarithmische Tabellen haben, die so bequem als möglich zum gewöhnlichen Gebrauche seyn sollen, so ist die Zahl 10 die beste Grundzahl. Denn um nur einiges hier anzuführen, so unterscheiden sich bey dieser Grundzahl die Logarithmen des 10, 100, 1000fachen u. s. w., so wie auch die Logarithmen des 10ten, 100sten, 1000sten Theils einer Zahl u. s. w. von dem Logarithmen jener Zahl nicht in den Zehntheilern, sondern nur in der ganzen Zahl, und wenn man also den Logarithmen einer Zahl weiß, so kann man daraus sehr leicht die Logarithmen aller der Zahlen finden, die aus jener durch die Multiplication oder Division mit 10, 100,

1000 u. s. w. entstanden sind. Da ferner $l\,10 = 1$, $l\,100 = 2$, $l\,1000 = 3$ u. s. w. so fallen die Logarithmen von 11 bis 99 zwischen 1 und 2, die Logarithmen von 101 bis 999 zwischen 2 und 3 u. s. f., und es besteht also der Logarithme einer jeden Zahl von 10 an aus einer ganzen Zahl, die um 1 kleiner ist als die Anzahl der Ziffern in der gegebenen Zahl und aus einem Bruche. Da nun $\frac{10}{10} = 1$ und $l\,\frac{10}{10} = l\,10 - l\,10 = 1 - 1 = 0$, so fallen die Logarithmen der Zahlen von 2 bis 9 zwischen 0 und 1, und es ist also die Kennziffer oder Characteristik eines jeden Logarithmen, (so nennt man die Zahl, die ein Logarithme vor den Zehntheilern hat) eine ganze Zahl, die aus einer Einheit weniger besteht als die Zahl Ziffern enthält. Aus diesem Grunde hat man daher auch die Logarithmen, da ihr Nutzen zu groß ist, als daß die Weitläuftigkeit der Arbeit von ihrer Berechnung hätte abschrecken können, für die Grundzahl 10 berechnet, und hier (der Lehrer zeigt die kleine wolfische Sammlung der Logarithmen dem Schüler) sehen Sie die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000.

S. Hat man denn die Logarithmen nicht weiter berechnet?

L. Ja, und ich werde Sie in der Folge selbst mit vollständigern Sammlungen bekannt machen. Jetzt sind diese Tafeln hinlänglich, um Ihnen die

Anwendung der Sätze, die wir bereits von dem Gebrauche der Logarithmen gehabt haben, bey dergleichen Tafeln zu zeigen. Es stehen in denselben wie Sie sehen, die Zahlen in ihrer natürlichen Folge, und die Logarithmen derselben daneben. Sie gebrauchen also diese Tafeln ganz so, als die Reihen S. 257. Suchen Sie also das Product von 24 x 39 vermittelst dieser Tafeln.

S. Dann suche ich

l 24 = 1,3802112 und
l 39 = 1,5910646, und addire.

Die Summe 2,9712758, suche ich unter den Logarithmen auf, und die daneben stehende Zahl 936 ist das Product von 24 x 39.

L. Nun suchen Sie die 2te und 3te Dignität von 17.

S. Dann suche ich

l 17 = 1,2304489, u. mache davon
das 2fache 2,4608978 und
das 3fache 3,6913467

Die Zahl, die in den Tafeln neben 2,4608978 steht, oder 289 ist das Quadrat, und die Zahl neben 3,6913467 oder 4913 ist der Cubus von 17.

L. Wie werden Sie nun den Quotienten von $\frac{936}{24}$ finden?

S. Ich suche

l 936 = 2,9712758 und
l 24 = 1,3802112, ziehe den letzten

ab, u. suche d. Diff. 1,5910646, in den Tafeln ab. Die Zahl 39, welche dabey steht giebt den Quotienten an.

L. Wie finden Sie ferner die Quadratwurzel aus 289?

S. Ich suche

l 289 = 2,4608978, dividire ihn durch 2 und 1,2304489 ist der Logarithmen der Quadratwurzel aus 289, so daß also die Quadratwurzel aus 289 = 17 ist.

L. Und die Cubikwurzel aus 4913?

S. Da nehme ich von l 4913 = 3,6913467 das Drittheil oder 1,2304489, und suche solches in den Tafeln auf. Die Cubikwurzel aus 4913 ist also auch 17.

L. Wenn Sie, anstatt Sich der Logarithmen zu bedienen, die verlangten Zahlen auf dem gewöhn-

gewöhnlichen Wege suchen, so werden Sie dasselbe finden; aber dabey zugleich bemerken, daß man bey den gegebenen Exempeln noch leichter ohne logarithmische Tabellen seinen Endzweck erreiche. Allein die gegebenen Exempel sollen auch nur den Gebrauch, nicht den Nutzen der logarithmischen Tabellen zeigen. Rechnen Sie nun

$\frac{21^{24}}{20^{24}}$?

S. Nun suche ich

l21 = 1,3222193, und multiplicire
ihn mit 4 x 6 5,2888772
31,7332632
Ferner l20 = 1,3010300, und multipl. ihn
auch mit 4 x 6 5,2041200
31,2247200. Hierauf ziehe
ich von 31,7332632
31,2247200 ab, und suche den
Rest 0,5085432.

in den Tafeln auf. Allein diesen Logarithmen finde ich ja nicht.

L. Stellen Sie Sich einmal vor, als ob Sie den Logarithmen 3,5085432 hätten, welcher von dem Logarithmen 0,5085432 blos in der Kenn-

Kennzifer verschieden ist. Vielleicht steht dieser in der Tafel.

S. Ja dieser ist da, und die Zahl, welche dabey steht, ist 3225.

L. Wenn Sie nun diese Zahl mit mit 10 dividirten oder 322,5 nähmen, welches würde dann der Logarithme seyn?

S. 2,5085432.

L. Und wenn man anstatt dieses Logarithmen nur 1,5085432 nimmt, so gehört hiezu die Zahl?

S. 32,25.

L. Und also zu dem Logarithmen 0,5085432?

S. Die Zahl 3,225.

L. Dies ist also die Zahl, welche $\frac{21^{24}}{20^{44}}$ gleich ist, Auf die Art kann man sich also helfen, wenn man von einem Logarithmen zwar die Zehntheiler aber nicht die Kennzifer findet. So viel Einheiten man in der Kennzifer des Logarithmen weniger hat, soviel Stellen schneidet man für die Zehntheiler ab, so wie man, wenn man mehr hätte, soviel Nullen anhängen müßte. Bey diesem

sem Exempel fällt in die Augen, daß man mit den Logarithmen weit kürzer und sicherer rechnet, als ohne dieselben, und es giebt eine Menge Fälle, wo der Vortheil noch grösser ist. Aus diesem Grunde werde ich Sie daher in der Folge mit den Logarithmen noch bekannter zu machen suchen, denn das bisherige ist nur erst der Anfang, so wie Sie auch in dem übrigen, je länger wir uns mit der Arithmetik beschäftigen, Ihre Kenntnisse nur mehr erweitern sollen. Das schwerste und trockenste haben Sie überstanden, von jetzt an wird, indem Sie das Erlernte werden anwenden müssen, Ihnen die Arithmetik noch um vieles wichtiger und angenehmer werden.

Verzeichnis der Pränumeranten.

Altona 1 Exempl.

Herr H. von der Smissen Sohn.

Aschersleben 2.

Herr v. Günther, Obristlieutenant. Hr. Mellin.

Berenburg 3.

Herr Abt, Regierungssekretär 2 Exemplar. Hr. Thielemann, Fürstl. Cabinetssekretär.

Berlin 327.

Herr J. C. F. Ahlefeld. Hr. Bärbaum, Hofmeister bey des Prinzen Ferdinand Königl. Hoheit. Hr. H. F. Bärensprung. Hr. Bartsch in Golzo. Hr. Baudoin, Kaufmann. Hr. Bauer, Kriegsrath. Hr. Bauer, Kaufmann, Hr. Bauer. Hr. Baumbach, Sekretär. Hr. H. L. Bellmann. Hr. Bemberg, Cand. Theol. Hr. J. G. Benedictus. Hr. Berger, Creis-Accise-Inspektor. Hr. Bernoulli, Mitglied der K. Pr. Akademie der Wissenschaft.

Hr. Bettkober, akademischer Bildhauer. Hr. v. Beulwitz, Rittmeister beym Regiment Gens-d'armes. Hr. Bierdemann. Hr. Herz Bing. Hr. C. F. W. Bock. Hr. Bode, Astronom der Königl. Academie der Wissenschaften. Hr. v. Boeltzig, Lieutenant vom Reg. Herz. Friedrich v. Braunschweig. Hr. A. C. W. Bohm. Hr. J. G. Borgmann. Frau v. Borck, Geh. Räthin. Hr. Lazarus v. Braunschweig. Hr. v. Bredow, Lieutenant beym Brannschen Regiment. Hr. F. E. Breitsprach. Hr. Broschwitz, Kaufmann 5 Ex. Hr. G. C. P. Buchholtz, 2 Exemplar. Hr. Busse, Sekretär. Hr. Carius, Proviant-Commissarius. Hr. Cattel, Buchhalter bey der K. Banco. Hr. Chemlin, Cadetten-Prediger. Hr. J. E. Corneli. Hr. Le Coq, Kaufmann. Hr. G. A. Dannenberg. Hr. C. D. Deichmann, Unterförster in Lehnin. Hr. J. F. Deichmann, Fußjäger in Lehnin. Hr. v. Delius, Major. 2 Exemplar. Hr. Derling, Post-Canzley-Direktor. Hr. Derling, Provincial-Zoll-Verificateur. Hr. Dickow, Kaufmann. Hr. Dittmar, Feldwebel. Hr. Dittmar, Professor. Hr. Dittmar. Hr. Doellen, Kaufmann. Hr. Dörge, Silberdiener bey Ihro Majestät der Königin. Hr. J. H. Duchstein, Schullehrer. Hr. A. Dubois, Pensions-Schulhalter. Hr. Dyonisius. Hr. Eichstädt, Kaufmann. Hr. Eiselen, in Thal. Hr. v. Enckvort, Obrister des Cadetten-Corps. Hr. Joseph Ephraim. Hr. Eremith, Mechanikus. Hr. C. A. Eysenhardt, 2 Exemplar. Hr. Fäsch, Cammermusikus 2 Exemplar.

Hr.

Hr. Feder, Kaufmann. Hr. G. F. Fickert. Hr. J. R. Frätzer. Hr. Frick, Münzwardein. Hr. Friedel, Conditor. Hr. Friedländer 4 Expl. Hr. C. W. Fuchs. Hr. J. W. Gandert. Hr. A. B. T. Gasser. Hr. Gattermann, Lehrer an der Cöll. Schule. Hr. H. F. Gebhard. Hr. Gentz, General-Münz-Direktor. Hr. Gentz, d. R. Befl. Hr. F. Göde, Referendarius. Hr. J. C. Gossow. Hr. Grack, Professor. Hr. v. Grumbkow, Capitain beym Reg. Herzog Friedrich v. Braunschweig. Hr. Grapow. Hr. J. D. A. Griese 2 Expl. Hr. J. F. Gummel. Hr. Haaren, Hof-Post-Sekretär. Hr. C. W. Haberland. H. Hauses, Insp. zu Strausberg. Hr. D. F. G. Hannsmann, Hr. G. F. W. F. Hannsmann. Hr. Harnisch. Hr. Harras, Eisenhändler. Hr. Hartmann, Buchhalter beym Salz-Comtoir. Hr. Hartung, Cantor. Hr. F. C. Hausen. Hr. Heindorf, Professor. Hr. P. H. Hempel 2 Expl. Hr. C. L. Henow. Hr. G. R. Hertzberg, Hofmeister der jungen Hrn. v. Werder. Hr. Herzlieb, Prediger in Zietz. Hr. Hesse, Posamentir. Hr. Hesse, Buchhändler 11 Expl. Hr. Meyer Herz. Hr. W. F. Hindenberg. Hr. Höler, Banco-Sekretär. Hr. Holm, Kaufmann. Hr. Hoppe. Hr. J. A. Hulbe. Hr. Jacob. Hr. Ideler. Hr. Pr. Jobst aus Weissensee. Hr. von Jurgas, Lieutenant bey dem v. Ziethenschen Husaren-Regiment. Hr. Kalenberg, Feldwebel bey dem v. Möllendorfschen Regiment. Hr. Kannenberg. Hr. Krikau, Cantor in Lüderitz. Hr. Krikau, Verwalter in Lüderitz. Hr.

Kemnietz, General-Postamts-Sekretär. Hr. J. G. C. Kiesewetter. Hr. Klein, Rauchhändler. Hr. Klemen. Hr. C. F. Klischnige. Hr. Knape. Hr. J. L. W. Knüppel, Referendarius. Hr. J. G. Köhler. Hr. Köhne, Münz-Buchhalter. Hr. J. C. F. G. Köllner. Hr. J. W. Köppen. Hr. Kratz, Geh. Sekretär. Hr. Krüger, Maler. Hr. C. L. Kühßling. Hr. Küster, Inspektor. Hr. Kunth. Hr. Lange, Buchhändler 9 Expl. Hr. A. L. Lange. Hr. Lencke, Uhrmacher. Hr. J. C. W. Lengnich. Hr. Lentz, Hofrath. Hr. Lessel, Rendant. Hr. C. S. Lieberkühn. Hr. J. E. G. Liebrecht. Hr. Abraham Nathan Liepmann. Hr. Isaac Löser. Hr. Pr. Lüdkemüller, in Caro. Hr. Marcuse junior. Hr. Marechaux, Schreibmeister bey dem Joachimsthalschen Gymnasio. Hr. C. L. Markus, Hofmeister. Hr. Matzdorf, Buchbinder 3 Expl. Hr. J. C. A. Matzdorff. Hr. J. F. Maushack. Hr. Meil, Medailleur. Hr. Joseph Mendelssohn. Hr. Meschker. Hr. Meves, Buchhalter bey der Königl. Porzellainfabrike. Hr. Aron Meyer. Hr. Milo, Kriegsrath. Hr. Mohnecke. Hr. Moser, Kaufmann. Hr. Jacob Moses, jüdischer Ober-Land-Aeltester. Hr. H. Müller, Kaufmann. Hr. J. F. Müller. Hr. B. G. Müller. Hr. J. F. H. v. Müllern. Hr. J. G. Nagel. Hr. Naumann, Sekretär bey der Wittwenkasse. Hr. Nelcker, Münzmeister. Hr. J. F. W. Neumann. Hr. Noac, Geh. Sekretär. Hr. Nobiling, Faktor. Hr. J. F. L. Nobiling. Hr. Oesau, in Glückstadt. Hr. Osten. Hr. Otto, Amtmann in Bredow. Hr. Pe-

Hr.

ters, Einnehmer. Hr. v. Prittwitz, Lieutenant. Hr. V. F. Protzen. Hr. Pyl, Doctor und Phisicus. Hr. Quase, Tanzmeister. Hr. C. W. Rahn. Hr. Randel, Kriegsrath. Hr. Reichard, Banco-Sekretär. Hr. C. v. Reizenstein, in Loxstaedt. Hr. D. W. A. Riediger. Hr. C. F. S. Roeder. Hr. Rösler, Chirurgus. Hr. Rohde, Ingenieur-Lieutenant. Hr. J. F. Rothe. Hr. Rudolph, Prediger in Krahne. Hr. v. Rudolphi, Kriegsrath. Hr. Rusin, Sekretär. Hr. C. J. Runge, Küster in Schönberg. Hr. Rungo. Fr. Wittwe Salomon Moses Levi. Hr. Schäffer, Cantor in Gettin. Hr. D. F. Schäffer. Hr. Schallehn. Hr. G. D. F. Schartow. Hr. Schlegel, Münzdirector-Assistent. Hr. Schlesing, Kaufmann 2 Expl. Hr. Schliphake, Cantor in Krahne. Hr. Schlutius, Kriegsrath. Hr. Schmidt. Hr. Schnock. Hr. Schoening. Hr. J. C. F. Schultze. Hr. J. L. F. Schultze. Hr. J. F. W. Schwerin. Hr. Seelig Lazarus. Hr. Setzer, in Ahrensburg. Hr. Siegfried, Rendant. Hr. J. G. Simmers, in Schloß Annaburg. Hr. E. F. G. Solbrig. Hr. E. C. A. Stahlknecht. Hr. Steffeck, Justiz-Sekretär in Strausberg. Hr. L. W. Stegemann. Hr. J. C. F. A. Steinbach. Hr. Stieglitz, Stud. M. Hr. Stöwer, Hofrath. Hr. Stoewer, Kaufmann. Hr. Struwe, Prediger in Zerrenthien. Hr. Spring, Kaufmann 3 Expl. Hr. J. G. L. Tage. Hr. Tetzner, Cantor zu Alsleben an der Sale. Hr. A. Thaulow. Hr. Thiede, Münzkassirer. Hr. Thiele, Schreib- und Rechenmeister zu St. Georg vor Annaburg. Hr. Thiem,

Sekretär bey dem Forstdepartement. Hr. v. Thiesenhausen, Fähnrich. Hr. Thürnagel, Lehrer bey der Königl. Academie militaire. Hr. Thürnagel, Banko-Kassirer. Hr. F. W. Tinn. Hr. Trautner, Sekretär in Blankenfelde. Hr. C. L. Treue. Hr. Veit, Kaufmann. Hr. J. W. Viering. Hr. Viering, Prediger in Bredo. Hr. Viering, Hofm. 3 Exemplar. Hr. F. W. Ulrich. Hr. A. W. F. Ulrici. Hr. J. J. Voigt. Hr. Voitus, Professor. Hr. Volckmann, Zollverifikateur. Hr. W***. Hr. J. J. Wagner. Hr. Waßmansdorff, Kaufmann. Hr. W. G. Wegener. Hr. J. G. Weinbeck. Hr. F. W. Welle. Hr. Weniger, Doktor. Hr. Wernicke, Kaufmann. Hr. Wesenfeld, Professor. Hr. Weßly. Hr. Wiedemann, Münzkassirer. Hr. Wiesel, Direktor 2 Expl. Hr. Wilcke, Commissarius 2 Ex. Hr. C. A. L. Wilmsen. Hr. Wohlgemuth, Maler. Hr. Woltersdorff, Kaufmann. Hr. F. H. F. Zaehr. Hr. Zäncker, Hof-Staats-Rentmeister. Hr. Zäplin, Accisebuchhalter. Hr. Zahr. Hr. Zeßler, Sekretär. Hr. A. H. Zschock 2 Expl. Hr. J. F. G. Zschock. 31 Ungenannte.

Bielefeld 12.

Herr Droege, in Versmold. Hr. Hildebrandt, Accißcontrolleur in Versmold. Hr. v. Hiller, Major. Hr. v. Hundt, Major. Hr. Klemm, Inspektor. Hr. Peters, Feldwebel. Hr. Reuter, Accise-Inspektor in Versmold. Hr. Roswinkel, Cand. Hr. D. Schlafhorst, Küster und

Orga-

Organist in Werther. Hr. F. W. Schmülling, Schullehrer in Isselhorst. Hr. F. H. Venghauß, in Werther. Hr. Witter, Apotheker in Werther.

Brandenburg 10.

Herr Arnold, Lehrer am Rittercollegio. Hr. Breymann, Director des Rittercollegii. Hr. v. Kamcke, Lieutenant. Hr. Neuendorff, Subrektor. Hr. Nerop, Rathmann. Hr. Sauberzweig, Rektor. Hr. Schinckel, Feldprediger. Hr. Schlegel, Hofmeister. Hr. Tismar, der Cammeralien Candidat. Hr. Willenbücher, Rektor.

Neu-Brandenburg 2.

Herr Zapfe, Buchbinder 2 Expl.

Braunschweig 1.

Herr Soergel, Professor.

Bremen 1.

Herr Lange.

Breßlau 3.

Herr Gedicke, Professor 3 Exemplar.

Burgscheid bey Achen 3.

Herr J. N. Eigendorff. Hr. J. F. S. Fabricius. Hr. J. G. Pauer.

Clausthal 19.

Herr J. C. Bencke, d. A. B. Hr. J. C. Brandes, Kaufmann. Hr. C. H. Bremer. Hr. G. C. M. Ey, Pochschreiber. Hr. Friedrich, Stadtrichter 2 Expl. Hr. Grösch, Einfahrer. Hr. J. C. Höfer, S. Aedituus. Hr. Jahn, Schichtmeister. Hr. J. H. Reincke, Silberbrenner. Hr. J. H. Niemeyer, Revisor. Hr. Noelle, Schichtmeister. Hr. J. L. Peschau, Stud. Phil. Hr. Plappert, Kaufmann. Hr. J. C. Schlaeder. Hr. J. F. W. Schottelius. Hr. J. G. G. Schönian. Hr. G. H. Wagener, Kaufmann. Hr. C. A. Wimmer.

Colberg 12.

Herr W. C. F. Eckard. Hr. G. C. Hentsch. Hr. G. Holtz. Hr. J. M. Holtze. Hr. W. F. Julius. Hr. J. Lüttcke. Hr. F. C. Schultze. Hr. J. H. Schweder. Hr. G. Sentska. Hr. J. Steinkrauß. Hr. W. F. Zettwach. Hr. W. F. Zimmermann.

Cöpnick 1.

Herr Lorentz, Prediger.

Cöslin 1.

Herr v. Grollmann, Obristlieutenant bey dem v. Billerbeckschen Regiment.

Cros=

Crossen 2.

Herr Fontius. Hr. G. D. Mücke, in Sommerfeld.

Cüstrin 2.

Herr Schultz, 2 Exemplar.

Dresden 36.

Herr Adam, Leihhaus-Buchhalter. Hr. Dietrich, Calculator 6 Expl. Hr. J. F. Daun, Hr. Egg, Buchhalter. Hr. Eger, Finanz-Calculator. Hr. Epperlein, Finanz-Calculator. Hr. Ericke, Amtsrath. Hr. Flügel, Revisor. Hr. Frauenstein, Calculator. Hr. C. J. Freiberg, Stud. Hr. Geisler, Leihhaus-Cassirer. Hr. Günther, geh. Sekretär. Hr. Günther, Finanz-Examinator. Hr. Herpich, Cammerschreiber. Hr. Kirsch, Finanz-Assistenzrath. Hr. Körner, Buchhalter. Hr. J. F. Koener, Kaufmann. Hr. Kummer, Calculator. Hr. Löwe, Examinator. Hr. Mathaei, Calculator. Hr. Mörlin, Leihhaus-Assistent. Hr. Oberreit, Finanz-Ober-Buchhalter. Hr. Probst, Calculator. Hr. Rödicke, Leihhaus-Buchhalter. Hr. Schiffel, Finanz-Calculator. Hr. Schopper, Calculator. Hr. Schoenfelder, Leihhaus-Pfandverwahrer. Hr. Stoeltzer, Assistenzrath. Hr. Schöningen, Finanz-Registrator. Hr. Trübensee, Rechnungssekretär. Hr. Voland, Rechnungssekretär.

Neustadt Eberswalde 2.

Herr Drost, Cand. Hr. Meyer, Buchhalter bey dem Messingswerke.

Ellrich 1.

Herr Sorge, Postmeister.

Friedeberg 1.

Herr G. Melan.

Fürstenwalde 1.

Herr Pauli Rektor.

Graudenz 1.

Herr C. F. Marohn, Fortifications- und Bau-Inspektor.

Greifswalde 1.

Herr Hartmann, Schreib- und Rechenmeister.

Grüneberg in Schlesien 1.

Herr G. F. Pirscher, Apotheker.

Grüneberg 1.

Herr A. Kahl, Stadtpfarrer.

Halberstadt 1.

Herr H. L. v. Beville, Freycorporal bey des Herzogs von Braunschweig Regiment.

Hal-

Halle 4.

Herr Matthias, Königl. Salzfaktor. Hr. Nicolai, Lehrer und Königl. Pädagogio. Hr. H. C. Schultze, Stud. Hr. Sukerow, Lehrer am Königl. Pädagogio.

Hamburg 38.

Herr J. H. Benecke. Hr. Berg. Hr. J. F. Bosseu. Hr. G. Boue und Sohn. Hr. Dittmar, Kaufmann. Hr. F. A. Dopf. Hr. T. Halsey. Hr. J. C. Hagedorn. Hr. Haeuser, Informator. Hr. Herrfeld, Postsekretär. Hr. Hoffmann, Buchhändler 6 Expl. Hr. C. D. Kauffmann. Hr. L. Köllinghausen 2 Expl. Hr. Krohn, Pastor. Hr. J. J. Kuff. Hr. H. Lange. Hr. C. Lehmann. Hr. J. W. Meyer. Hr. J. H. Nolbeck. Hr. Notte, Registerschreiber. Hr. C. Putparchen. Hr. Schröder, Banco = Sekretär. Hr. J. Siewers. Hr. L. Tamm, Kaufmann. Hr. J. A. C. Tiedemann, Kaufmann. Hr. Ulrich, Rektor 4 Expl. Hr. Watermeyer, Consistorialrath. Hr. E. D. Westphal, Schulhalter. Hr. Zagel, Justizrath.

Hanover 43.

Herr Alms. Hr. Apel, Mathematikus. Hr. Arend. Hr. Bolscher, Buchdrucker. Hr. Bues, Rektor. Hr. Burghard, Schulcollege. Hr. Friederichs, Quartiermeister. Hr. Grote, Cammersekretair. Hr. v. Hadenstorff, Lieutenant beym

Reg.

Reg. v. Linsing. Hr. v. Hugo, Drost. Königl. Intelligenzcomtoir 19 Expl. Hr. Lies, der schönen Wissensch. Befl. Hr. Mathaei. Hr. Pabst, Stud. Litter. Hr. Petersen, d. Mathem. Befl. Hr. Pralle, Postschreiber. Hr. Rocca, Schulhalter. Hr. Roencke, Cantor. Hr. Röhlfs, Schulmeister. Hr. Sohnehagen, Küster. Hr. Surssen, Postschreiber. Hr. Tronier, Quartiermeister. Hr. Warlitz. Hr. Wuckerhagen. Hr. Ziemann.

Havelberg 5.

Herr Kuhlmeyer, Dohmsyndikus. Hr. Nirrenbach, Sekretär. Hr. Schmarso, Rektor 3 Expl.

Hirschberg in Schlesien 22.

Herr S. E. Adolph. Hr. J. J. Esche. Hr. J. L. Fritsch. Hr. C. G. Grobs. Hr. W. H. G. Hoffmann. Hr. J. G. Hönig. Hr. S. G. John. Hr. C. G. Klein. Hr. E. G. Kohl. Hr. C. G. Krause. Hr. J. E. Krause. Hr. J. G. Liebich. Hr. F. W. Lincke. Hr. J. G. Lincke. Hr. J. G. Mentzel. Hr. F. G. Paul. Hr. L. G. C. Rosenhayn. Hr. J. G. Schumann, Prorector. Hr. L. G. Steige. Hr. W. F. Sturm. Hr. J. W. Wegner. Hr. Z. G. Zölfel.

Königsberg in Preussen 20.

Herr Boetticher. Hr. Burghard, Kaufmann, Hr. v. Bütty, Ingenieurlieutenant. Hr. Dengel, Buchhändler, 7 Expl. Hr. Fischer. Hr. Gerlach, d. G. G. B. Hr. Hermes, Caplan.

Hr.

Hr. G. F. Koenig. Hr. Krafft, in Kremitten. Hr. Marschal, Candidat. Hr. Pfohl, Candidat. Hr. Schirmann, Referendarius. Hr. Traisinet, Kassenassessor. Hr. Wagner.

Landsberg an d. W. 2.

Herr Pietsch, Senator. Hr. Wentzel, Conrektor.

Leipzig 4.

Herr Haug, Buchhändler. Hr. Pastor Maurer, in Breunsdorf. Hr. Bürgermeister Maurer, in Meerane. Hr. Radnütz, Cand. der Theol.

Lübeck 8.

Herr H. A. Behrens. Hr. Donatius, Buchhändler 4 Expl. Hr. Jovers. Hr. C. F. Lehmann. Hr. D. F. Reuter.

Ludwigslust 1.

Herr Cornelius.

Lüneburg 9.

Herr Albers, Kaufmann. Hr. Beumelburg, Candid. Hr. Dempwolff. Hr. Heise, Cand. Hr. Hermann. Hr. Krut, Doct. und Sindikus. Hr. v. Oldershausen. Hr. Roscher, Garnisonauditor. Hr. Scheibe, Hofmeister.

Lychen in der Uckermark 1.

Herr Riemann, Oberprediger.

Mace=

Macedonien 1.

Herr Bendella.

Magdeburg 7.

Herr Eckstein, d. G. G. Candidat. Hr. Funck, Rektor an der Dohmschule. Hr. Guischard. Hr. Honstein, Lehrer an der Dohmschule. Hr. Matthias. Hr. Petri, Lehrer am Kloster unserer l. Fr. Hr. Rolle, Lehrer an der Dohmschule.

Nauen 1.

Herr Salpius, Inspektor.

Oldenburg 15.

Herr D. G. Busch. Hr. Frey, Cammer-Assessor. Hr. Fuhrecken, Obergerichts-Anwald. Hr. Knodt, Kaufmann. Hr. Kühlmann, Provisor. Hr. Martens, Schulhalter. Hr. Meyer, Schreibmeister. Hr. Oljemann, Kaufmann. Hr. Scherenberg, Kaufmann. Hr. Stalling, Schulhalter. Hr. Strohm, Buchbinder 2 Expl. Hr. Tollner. Hr. Vettmann, Verwalter. Hr. Wardenburg, Justizrath.

Paderborn 1.

Herr J. W. Faber, Professor d. Mathematik.

Potsdam 31.

Herr Bahr, Lehrer am Königl. Waisenhause. Hr. F. M. Bovet, Hofrath und Sekretär bey des

Prinz

Prinz von Preussen Königl. Hoheit. Hr. Boerstel, Unterofficier beym 3ten Batail. Garde. Hr. J. W. H. Buchholtz, Lehrer am Königl. Waisenhause. Hr. Cremer, Leh. am K. Wais. Hr. Ebner, Grenadier. Hr. Hasse, Unteroffizier vom ersten Batail. Garde. Hr. Heyenberg, Lehrer am Königl. Waisenhause. Hr. Horvath, Buchhändler 2 Expl. Hr. Jacubowsky. Hr. v. Lemke, Lieutenant bey dem Reg. Garde. Hr. Meyer, Lehrer am Königl. Waisenh. Hr. J. Morino, jun. Kaufmann 6 Expl. Hr. Neuhauß, Unteroffizier. Hr. Neumann. Hr. Noten, Unteroffizier beym ersten Batail. Garde. Hr. Page, Cantor und Lehrer am Königl. Waisenh. Hr. Poeler, Lehrer am K. Wais. Hr. Rohrlack, Leh. am K. Wais. Hr. Roethscher, Cant. u. Lehrer am Königl. Wais. Hr. Schmidt, Pred. Hr. Schieferdecker, Lehrer am K. Wais. Hr. Seliger, Conrektor. Hr. Sydow, Buchhalter. Hr. Worbs, Lehrer am K. Wais.

Prentzlow 18.

Herr Anwandter, Justizcommissarius 5 Expl. Hr. Baumann, Gerichtsassessor. Hr. Dröhmer, Kaufmann. Hr. Hering, Pred. in Walmow. Hr. J. W. Jordan. Hr. F. W. Krohn, Kaufmann. Hr. Luck, Amtmann in Grünberg. Hr. Müller, Kaufmann. Hr. C. Nobiling, Kaufman. Hr. Reinhardt, Feldprediger. Hr. Ritter, Kaufmann. Hr. Steindorff, in Bagemühl. Hr. v. Stülpnagel, in Grünberg. Hr. Wilcke, Obergerichtsrath.

Qued-

Quedlinburg 8.

Herr Becker. Hr. Haupt. Hr. Heese. Hr. B. L. Ilse, Prediger in Hüttenrode. Hr. J. L. Lerche. Hr. Michelsen, Schreib-Rechen- und Zeichenmeister. Hr. Wittig, Subconrektor. Hr. Ziegler.

Rothenburg 1.

Herr Klotz, Ober-Bergamts-Assessor.

Ruppin 6.

Herr Kühn, Buchbinder 6 Exempl.

Rügenwalde 1.

Herr Speyer, Kaufmann.

Schönhagen bey Pritzwalck 1.

Herr Fahrenholtz, Lehrer der v. Rohrschen Kinder.

Schwedt 1.

Herr Laue, Hofcantor.

Schwerin 16.

Herr A. Becker, Advocat. Hr. F. Buchholtz 2 Ex. Hr. Drummer, Canzelist. Hr. Engel, Doct. Med. Hr. Enzenbaum 2 Ex. Hr. Francke, Stud. Theol. in Lützow. Hr. Knöchel, Cand. Theol. in Lützow. Hr. Lehmann, Cand. Theol. Hr. Lemke, Regimentsfeldscheer. Hr. Neumann, d. sch. Wissensch. Befl. Hr. Pauli, d. sch. Wissensch. Befl. Hr. Röcher, d. sch. Wissensch. Befl. Hr. Schmidt, d. sch. Wissensch. Befl. Hr. Stichert.

Sol-

Soldin 1.

Herr Böttcher, Postmeister.

Spandow 1.

Herr Weiße.

Stettin 1.

Herr Gilly, Bau-Director.

Stolpe 1.

Herr Dense, Postmeister.

Strelitz 3.

Herr L. F. v. Arensdorff. Hr. L. T. v. Arensdorff. Hr. Steindorff, Cantor.

Neustrelitz 1.

Herr L. W. Storch, Cand. Theol.

Verden 2.

Herr J. C. Alhusen. Hr. F. A. Lüdemann.

Wernigerode 1.

Herr Elster, Rechnungsführer.

Wittenberg 2.

Herr Hesse 2 Expl.

Wittstock 3.

Herr Kober, Kaufmann. Hr. Projahn. Hr. v. Rühle, Lieutenant.

Wriezen an der Oder 1.

Herr J. C. Malwitz, Kaufmann.

Königs-Wusterhausen 3.

Herr Albrecht, Bauinspektor. Hr. Moritz, Rentmeister. Hr. Schmidt, Cammerrath.

Zelle 1.

Herr Brandes, Sekretär.

Zellerfeld 20.

Herr A. C. W. Borkenstein, Hüttenvoigt. Hr. J. F. Bruel, Hüttenreuter. Hr. Deneke, Stufgeschworner. Hr. Eckert, S. D. F. B. Hr. J. F. Falck, Stadtrichter. Hr. A. G. C. Gehring, D. R. B. Hr. J. C. Gotthardt, Kaufmann. Hr. F. H. Heinemann, Zehntgegenschreiber. Hr. J. A. Kast, Revisor. Hr. L. W. A. König, D. M. B. Hr. N. T. Küster, Stud. Jur. Hr. J. C. Küster, Pochschreiber. Hr. J. L. Küster, Senator. Hr. J. D. Kreichelt, Schulhalter. Hr. J. C. Langenberger, Schulhalter. Hr. C. G. L. Langenberger, D. H. B. Hr. J. H. W. Lübbecke, D. H. B. Hr. J. H. Ramdohr, Kaufmann. Hr. J. C. Tettenborn, Cantor. Hr. J. G. Timmler, Stud. Phil.

Zerbst 3.

Herr J. L. G. Hartwich. Hr. Kuntz, Amtscopist. Hr. Püschel, Registrator.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian

Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik

Bd.: 1

Berlin (1784)

Math.p. 356-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082421-5
VD18 90242807